RENATI

DES-CARTES

GEOMETRIA.

EDITIO TERTIA,

Multis accessionibus exornata, & plus alterâ sui parte adaucta.

RENATVS DES-CARTES, DOMINVS DE PERRON, NATVS HAGÆ TVRONVM, ANNO. M.D.XCVI, VLTIMO DIE MARTII.

Primus inaccessum qui per tot sæcula verum
Eruit è tetris longæ caliginis umbris,
Mysta sagax, Natura, tuus, sic cernitur Orbi
Cartesius. Voluit sacros in imagine vultus
Jungere victuræ artificis pia dextera famæ,
Omnia ut aspicerent quem sæcula nulla tacebunt.

CONSTANTINI HVGENII F.LIT

GEOMETRIA,

à

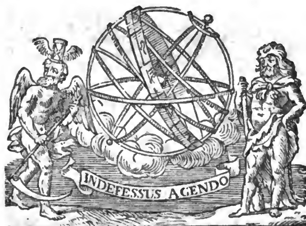
RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quam ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.





AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

CATALOGVS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

RENATI DES CARTES Geometria, tribus libris comprehensa.

FLORIMONDI DE BEAVNE in illam NOTÆ BREVES.

FRANCISCI à SCHOOTEN in eandem Commentarii recogniti & aucti.

—— Ejusdem APPENDIX, de Cubicarum Æquationum Resolutione.

—— item ADDITAMENTVM, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis.

JOHANNIS HVDDENII Epistolæ duæ, quarum altera de Æquationum Reductione, altera de Maximis & Minimis agit.

HENRICI VAN HEVRAET Epistola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos Vniversalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum.

FLORIMONDI DE BEAVNE duo Tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

SERE-

SERENISSIMÆ PRINCIPI

ELISABETHÆ.

FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS, Comitis Palatini, & Electoris Sacri Romani Imperii, Filiæ natu maximæ.

SERENISSIMA PRINCEPS,



Vm ea Celſitudinis tuæ ſit claritas, ut maximorum hominum monumenta, tanti nominis ſplendore illuſtrata, in lucem jam pridem prodierint; quid mirum, ſi & ego lucubrationes haſce Celſitudini tuæ conſecrandas eſſe duxerim? Nam, ut reliquas virtutes, quæ in Te eximiæ ſunt, taceam, tantâ cum prudentiâ ſingularis ingenii tui perſpicacia conjun-

ćta eſt, ut, ſpretis illis artibus & ſcientiis, quæ inanis potiùs gloriæ, altercandique ſtudio, quàm veri inquiſitionis causâ addiſcuntur, eas ſolas amplexa fueris, quæ placidè philoſophantes, nihilque niſi evidens admittentes, continuâ ſimplicium rationum ſerie ad abſtruſiſſimarum rerum cognitionem perducunt. Vnde fieri non potuit, quin ad ſublimem illam ſapientiam, quam in Te ſuſpicimus ac veneramur, feliciſſimè tempore breviſſimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non eſt quòd hic commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatiſſimæque memoriæ Principum, qui ſanguinis vinculo tibi fuêre juncti, atque ex
harum

harum artium cultura immortalem ſibi gloriam reportarunt, eas non minùs colas, quàm hæreditatis jure in iiſdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetraſti, ut Artem Analyticam, ipſam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præſertim acumen requiritur, optimè cognoveris, eâque ratione, quantùm incomparabilis ingenii tui induſtria præſtare valeat, ſatis ſuperque oſtenderis. Quæ cum ita ſint, atque inſuper in me ipſo compertum habeam, quanto favore Matheſeos cultores proſequaris; jure meritiſſimo effecêre, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum teſtimonium extare vellem, atque hoc qualecun-

lecunque, sive grati animi monumentum, sive observantiæ in Celsitudinem tuam meæ pignus, offerrem. Quod, ut solito favore excipiat, submisse rogo,

SERENISSIMÆ CELSITVDINIS TVÆ

Dabam Leydæ, XII Cal. Julii
Anni CIƆ IƆC XLIX.

Devotissimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCVS à SCHOOTEN

LECTORI

S.

Ovennium est, & quod excurrit, Benevole Lector, cùm Geometria hæc Nobilissimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, *quam vernaculâ linguâ anno 1637 inter Philosophiæ suæ specimina in lucem edidit, è Gallica a me in Latinam linguam versa commentariisque illustrata primum prodiit. Interea autem temporis cum operam, quam hoc in negotio collocâram, Viris literatis & ingeniosis pluribus, quos stupenda Authoris nostri eruditio latère non potuit, haud ingratam fuisse comperérim; non potui non, distractis exemplaribus, cùm novam editionem Typographus adornaret, quin honesta ipsius petitioni locum darem, eaque flagitanti concederem, quæ ad Operis hujus commendationem illustrare vel addere valebam. Quid hic autem nunc demum præstiterim, si candido Lectoris judicio relinquam, facilè ex utriusque editionis inter se collatione dignoscet. Cujus etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quòd regiam hic ad pœnitiora universæ Matheseos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere sciebam, tum quòd hanc summi Viri Geometriam publici interesse, & è re eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipso cum aliis strenuis Methodi nostræ cultoribus, non sine voluptate indies experiebar. Verùm enimvero cum illius utilitas tanta sit ut, si eam vel paucis describerem, paginæ, quæ præfationi hic inserviunt, deficerent, indicasse suffecerit, vix quicquam in universa Mathesi ita difficile aut arduum occurrere posse, quò non inoffenso pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometria hujus legibus non subjici solvique possit. Accedit, quòd nullis Problematum finibus aut numero coërceatur, sed fructum, qui vel à Veterum Analysi vel à Recentiorum Algebra exspectandus erat, omnem in se contineat, nec quicquam hic desiderari posse videatur; atque adeò frustra sit, quod de aliâ sibi quis exoptandâ Methodo, ad Matheseos culturam perfectionemque in poste-*

** poste-

posterum cogitet. Quippe hæc illa est, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modò in Mathematicis Scientiis summas difficultates adolescens adhuc superavit, aliisque in inveniendo palmam præripuit; sed tantam quoque ingenii promptitudinem facilitatemque sibi deinceps conciliavit, ut primus clavem, quâ mysteria Universi reseranda sunt, & cujus ope natura naturæ ac lux orbi magis magisque redditur, invenerit: adeò ut eorum, quæ lumine naturali cognosci queunt, nihil tam abditum, densisque immersum fuisse tenebris, putandum sit, quod ingenii sui felicitate eruere ipse desperasset. Versionem quod attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse studuerim, vix est, quòd censuram aliquorum metuam; præsertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari vel clariorem reddere, postea recognitam fuisse sciverint. Verum cum hæc Geometria à paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter quæstionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non sine abstrusâ attentione ac indefesso studio per se intelligi potuerit, periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cùm metam vel ipsi ignorarent, vel improbi negarent, arenam desererent. Conscius itaque ego illam non in eum finem ab Authore conscriptam esse, quasi ipsius Methodum ex ea unusquisque quam facillimè haurire posset, sed tantùm ut eximia aliquot ejus specimina ederet: operæ pretium duxi in commune consulere, & difficiliora loca passim à me explicata uberioribus hinc inde exemplis altius illustrare. Scopum Authoris quod spectat, eum hoc loco exponere haudquaquam duxi necessarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiserim, veterumque circa Geometriæ Problemata opiniones ac decreta, scitu non injucunda, ibidem explicaverim, quò operis summam atque adeò commentariorum nostrorum usum breviter complecterer. Porrò ne quid deesse videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem sortiretur, additæ etiam sunt Notæ à Clarissimo atque Amplissimo Viro D. FLORIMONDO DE BEAVNE, *Consiliario Blesensi, in eandem olim Gallicè conscriptæ. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me translatæ, postquam huic Geometriæ primò ejus permissu essent annexæ, dein ab ipso recognitæ & emendatæ, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores sunt accessuræ. Præterea, quò unusquisque instructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, se ad ipsam Geometriam legendam accingere possit; haud omittendum duxi, quin simul*

simul Introductionem nostram, quam Vir Clarissimus, mihique amicissimus, D. ERASMIUS BARTHOLINUS, *nunc Medicinæ & Matheseos in Academia Hafniensi Professor Regius, in eum finem olim conscripsit ac anno* 1651 *publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni huic adjungerem. Quo quidem negotio futurum spero, ut, quod propriis condimus horreis, ex aliena non opus sit messe emendicare, licet Author antehac, tum ad suam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometriæ libris jam versatum præsupposuerit, ne quæ inibi dicta sunt & demonstrata repetere cogeretur; tum etiam ad suam Methodum addiscendam leviorem vulgaris Algebræ cognitionem requisiverit. Nec enim video, quid impræsentiarum, post mediocrem in Arithmetica & Geometriæ elementis exercitationem, calculique, eadem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuisset, hæc omnia ab Authore ipso fuisse præstita; quippe qui tantum regulas suæ Methodi maxime necessarias hic exposuit; attamen quia animadvertit laborem atque industriam, quam Lector in investigandis reliquis, demonstrandisque iis, quæ tantùm intento digito indicavit, impenderet, præcipuum esse in hac Scientia, quo cujusque ingenium excolatur: a semetipso impetrare non potuit, ut ea fusius pertractaret. Hinc cum successu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam sedulò versare ejusque arcana penitissimè rimari cordi fuit, non pauci reperti sint, qui, Authoris vestigiis arctè insistentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimùm facientia, invenerint, omnesque inter, præ copia inventorum eorumque dignitate, subtilissimus ac præstantissimus* D. IOHANNES HVDDENIVS, *Amstelodamensis, amicus meus integerrimus, primas facile obtineat: visum fuit ea, quæ ab ipso de Æquationum Reductione ac de Maximis & Minimis, maximam partem Belgicè conscripta, inter alia per literas mihi sunt communicata, postquam à me Latinè essent reddita, Geometriæ huic pariter subjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epistolam, quam acutissimus, mihique ut* HVDDENIO *nostro conjunctissimus,* D. HENRICVS VAN HEVRAET, *Harlemensis, Salmurio nuper ad me transmisit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à se novissimè excogitatam, transmutandi*

tandi complures curvas lineas in rectas, quod ipsum à nemine (quantum novi) in hunc usque diem ostensum est, quin imo à multis ut insolubile habitum: id mihi agendum putavi, ne eximium adeò inventum occultaretur, ut, impetrato ad id ejus consensu, illud hic loci in lucem producerem. Eâdem ratione ductus, ne sparta, quam Vir Amplissimus, nunc piæ memoriæ, D. DE BEAUNE *in excolenda propagandaque hujus Geometriæ Methodo susceperat, præcipiti ejus fato interiret; ex officio atque publica Mathesin amantium utilitate fore existimavi, si Clarissimum Virum* D. ERASMIUM BARTHOLINUM *nostro rogatu adigerem, ut, quæ de Natura, Constitutione, ac Limitibus Æquationum* D. DE BEAUNE *vernaculâ suâ linguâ in lucem dare constituerat, cùm in manus ipsius incidissent, publico non invideret. Nec frustra in eo fui, nactus enim sum, ut, quæ ex ejus adversariis, non sine indefesso labore ac difficili fortuna, ad umbilicum perduxerat, Latinè redderet, nobisque, quò una cum his à me typis mandarentur, concederet. Cæterùm ad Artis Analyticæ præstantiam uberiùs exhibendam, & ad meum rei literariæ inserviendi studium comprobandum, non abs re fore judicavi, si Geometriam hanc non modò fœtu illo posthumo ac advenâ, sed alio etiam primogenito eoque indigenâ adaugere satagerem; nisi fortè hunc alium quoque posthumum ac advenam dixeris, eo nomine atque intuitu, quod parens jam totus Reipublicæ vivat, nobisque & studiis nostris civiliter mortuus, & quasi peregrinus factus sit. Etenim cum aliquot abhinc mensibus occasio mihi data fuerit, ut in eum quem de Locorum Planorum & Solidorum per Artem Analyticam inventione tractatum Nobilissimus atque Amplissimus Vir* D. IOHANNES DE WITT, *Consiliarius & Pensionarius, sive minister primarius Hollandiæ VVest-Frisiaque, concinnaverat, opportunus inciderim: non potui non, cum Authoris permissu inspiciendi potestas mihi facta esset, quin sententiam, quid de illo videretur, rogatus, coram lubens exponerem. Hunc itaque quia admodum sublimem, tantoque Viro dignâ ingeniositate conscriptum, ac insuper ad penitiorem hujus Geometriæ intellectum haud parum facere posse deprehenderam, (quippe qui subtilissimam illam de Locis materiam, in secundo Geometriæ libro paulò succinctiùs pertractatam, de integro resumit, alioque pacto componit:) consultum*

tum duxi, ut in publicum emolumentum editionis adornandæ authorem essem. At verò facilè prævidebam, saltem suprema, quibus fungitur, Reipublicæ munera, gravesque hominis curas, impedimento fore, quo minùs tam splendida proles, quæ jam ante decennium formata in conceptu huc usque delituerat, absque obstetricis auxilio, in lucem unquam produceretur. Quocirca cum eam mei juris facere non dedignatus fuerit, neque etiam copiam eorum, quæ de Elementis Curvarum Linearum jam pridem conscripsit, mihi facere recusaverit: rem ubique gratam me facturum credidi, si tam hunc quàm illum tractatum ab ulteriori oblivione vindicandi operam darem; præsertim cum id iis, qui Mathesin seriò excolunt, acceptum fore perspexerim, quòd curvarum primi generis ortum longè simplicius generaliusque ab ipso quam à veteribus, absque ulla solidi consideratione, inspectum fuisse, reperturi sint. Quas itaque curvas eâ ratione pertractavit, ut non solùm inde dimanet ortus secundi generis curvarum (quas quidem omnes simili methodo in plano delineavit ac per species distinxit,) verùm etiam ulteriorum graduum curvæ sponte quasi ex eodem fonte fluant atque deriventur. Futurum sperans, ut si primitiæ hujus fœtus ad illas viam sternentes operâ meâ in lucem emitterentur, iisque extrema imponeretur manus, quilibet judicaturus sit, & Literatorum commodo, & hujus Viri otio in absolvendis, quæ de Super-solidis Locis adinvenit, omni nisu à me fuisse consultum ac prospectum. Denique ut Methodi hujus Geometriæ dignitas splendorque omni ex parte in aperto esset, & cuique etiam pateret ejusdem calculo demonstrationes quoque Geometricas inniti aut ex eo elici posse, quales à Veteribus introductæ adhuc apud Recentiores passim in usu sunt, atque longâ propositionum serie ac lemmatum permixtione afferri solent, continuæ schematum animadversioni obnoxiæ: placuit coronidis loco & in operis complementum subnectere tractatum, in quo artem, iisdem Veteribus in difficiliorum hujusmodi demonstrationum compositione usitatam, occasione diversarum quæstionum, exponerem. ut, scilicet, his similibusque exemplis viam præeundo, non tantùm ejusmodi demonstrationes alias ex calculo facilè depromi ostenderem; verùm etiam hoc pacto inventionis modum, quem in majorem admirationem suorum inventorum artificiosè suppresserant, indicarem, atque Matheseos studiosos ad hujus Methodi calculum seu

 demon-

demonstrationum amussim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitatâ, ablegarem. Quibus quidem omnibus, si singulis satisfacere non licet, habeo saltem de quo abundè mihi gratuler, quòd nostros in hoc studiorum genere labores rerum æstimatoribus haud displicuisse nec displicere sciam. Vale. Scripsi Leidæ, anno reparatæ salutis CIↃ IↃCLIX.



INDEX MATERIARUM,

IN HAC

GEOMETRIA

CONTENTARUM.

LIBER I.

De Problematis, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas. Pag. 1
Quomodo Geometricè fiat Multiplicatio, Divisio, & radicis Quadratæ Extractio. 2
Quo pacto notis uti liceat in Geometria. ib.
Quomodo ad Æquationes perveniendum sit, quæ resolvendis Problematis inserviunt. 4
Quænam sint Problemata Plana, & quomodo ipsa resolvantur. 5 & 6
Quæstio desumpta ex Pappo. 7
Responsum ad Quæstionem Pappi. 11
Quomodo ponendi sint termini in hac Quæstione, ut ad Æquationem deveniatur. 13
Quo pacto cognoscatur, Problema hocce planum, quando illud in quinque tantùm lineis est propositum. 15

LIBER II.

De natura linearum curvarum.

Quænam sint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi possunt. 17
Ratio distinguendi eas in certa genera: Et cognoscendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum. 21
Continuatio explicationis Quæstionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata. 24
Solutio hujus Quæstionis, cum ipsa in 3 aut 4 tantùm lineis est proposita. 25
Demonstratio ejusdem solutionis. 32
Quid intelligendum sit per loca Plana, & Solida: Et ratio ipsa inveniendi. 34
Quænam sit prima & simplicissima linearum curvarum, Veterum Quæstioni inservientium, cùm ipsa Quæstio in 5 lineis est proposita. 35
Quænam curvæ lineæ in Geometriam sint recipiendæ, quæ describuntur, inveniendo plura earum puncta. 38
Quænam etiam illæ sint, quæ ope fili describuntur, & ibidem recipi possunt. 39
Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, sufficiat scire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum, & modum ducendi lineas rectas; quæ ipsas secent in omnibus illis punctis ad angulos rectos. 40
Modus generalis inveniendi lineas rectas; quæ secent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos. ibid.
Exemplum hujus operationis in Ellipsi; Et in Parabola secundi generis. 41 & 42
Aliud exemplum in Ellipsi secundi generis. 42
Exemplum constructionis hujus Problematis in Conchoide. 49
Explicatio quatuor generum novarum Ovalium, Opticæ inservientium. 50
Proprietates harum Ovalium, concernentes reflexiones & refractiones. 55
Demonstratio harum proprietatum. 57
Quomodo vitrum fieri possit, cujus una superficies tam convexa aut concava sit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rursus in altero dato puncto. 61
Quomodo aliud fieri possit, quod idem præstet, cujus convexitas unius superficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius. 63

Quæ-

Quomodo id omne, quod hic de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari possit ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva. 65.

LIBER III.

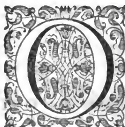
De constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

QUænam curvæ lineæ adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis. 67
Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium. ibid.
De natura Æquationum. 69
Quot haberi possint radices in qualibet Æquatione. ibid.
Quænam sint falsæ radices. ibid.
Quomodo diminui possit dimensionum numerus alicujus Æquationis, quando cognoscitur aliqua ex ejus radicibus. ibid.
Quâ ratione indagari queat, num data quantitas sit valor alicujus radicis. 70
Quot haberi possint veræ radices in qualibet Æquatione. ibid.
Quomodo faciendum sit, ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falsæ. ibid.
Quomodo augeri vel diminui possint Æquationis radices, ipsis non cognitis. 71
Quòd, augendo veras radices, falsæ diminuantur, & contra. 72
Quâ ratione secundus terminus Æquationis tolli possit. ibid.
Quo pacto fiat ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falsæ. 74
Quomodo faciendum sit, ut loca omnia Æquationis sint completa. ibid.
Quomodo multiplicari vel dividi possint Æquationis radices, ipsis incognitis. 75
Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros. ibid.
Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ. 76
Quòd radices tam veræ quàm falsæ possint esse reales, vel imaginariæ. ibid.
Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema est Planum. ibid.
Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem. 77
Quænam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubica. 79
Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cum Problema est Planum. Et quænam illa sint, quæ Solida sunt dicenda. ibid.
Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam. ibid.
Exemplum ostendens usum harum reductionum. 82
Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt. 84
Modus generalis construendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimensionum. 85
Inventio duarum mediarum proportionalium. 91
Ratio dividendi angulum in tres partes æquales. ibid.
Quòd omnia Solida Problemata reduci possint ad basce duas constructiones. 92
Modus exprimendi valorem radicum omnium, Æquationum Cubicarum, ac per consequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt. 94
Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sint sine aliis lineis, magis compositis. 96
Modus generalis construendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, sex dimensiones non excedentem. 97
Inventio quatuor mediarum proportionalium. 104.

RENA-

RENATI DESCARTES
GEOMETRIÆ
LIBER PRIMVS.

De Problematibus, quæ conſtrui poſſunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.



Mnia Geometriæ Problemata facilè ad hujuſmodi terminos reduci poſſunt, ut deinde ad illorum conſtructionem, opùs tantùm ſit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoſcere.

Et quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque ſolummodo operationibus conſtat, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Diviſionis ſpecie haberi poteſt:) Ita ſimiliter in Geometria, quod ſpectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non eſt, quàm ut vel ipſis addantur, vel ab iiſdem ſubtrahantur aliæ; vel etiam ſi una ſit, (quæ vocetur unitas, ut eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu aſſumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ, ut ad ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad alterutram, ut eſt altera ad unitatem, quod idem eſt, atque Multiplicatio; vel ut per ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Diviſione; vel denique, ut inter unitatem & aliam quandam rectam inveniantur una, aut duæ, plu-

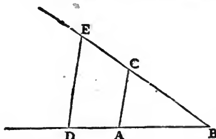
Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas.

A (margin, beside "parandas"); B, C (beside "aliæ; vel etiam"); D (beside "ut ad ipſas"); E (beside "plicatio; vel ut per")

resve mediæ proportionales, quod idem est, quod radicis Quadratæ, aut Cubicæ, &c. extractio. Neque enim hosce Arithmetices terminos, ut faciliùs intelligi possim, in Geometriam introducere verebor.

Quomodo Geometrice fiat.

Multiplicatio,

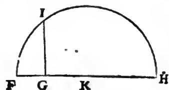


Sit, exempli gratiâ, A B unitas, oporteatque multiplicare B D per B C: jungo puncta A & C, ductâque D E parallelâ A C, erit B E productum hujus multiplicationis.

Divisio,

Vel si dividenda sit B E per B D, junctis punctis E & D, duco A C parallelam ipsi D E, eritque B C quotiens hujus Divisionis.

Extractio radicis Quadratæ.



Vel denique si ex G H extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipsi in directum lineam rectam F G, quæ unitas est; divisâque F H bifariam in puncto K, centro K intervallo F K seu K H describo circulum. quo facto, erit G I, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur super F H usque ad I, radix quæsita.

Quo pacto notis uti liceat in Geometria.

Nihil hîc de radice Cubicâ, nec de aliis dico, quòd de iis in sequentibus commodiùs sim acturus.

At verò sæpe non est opùs, hasce lineas ita in charta ducere, sed sufficit illas litteris quibusdam designare, singulas singulis. Vt ad addendam lineam B D lineæ G H, voco unam a & alteram b, scriboque $a + b$; Et $a - b$, ad subtrahendam b ex a; Et $a b$, ad multipli-

tiplicandam unam per alteram; Et $\frac{a}{b}$, ad dividendam a per b; Et aa, seu a^2, ad multiplicandam a in se; Et a^3, ad eandem adhuc semel multiplicandam per a, atque ita in infinitum; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, ad extrahendam radicem Quadratam ex a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem Cubicam ex a^3-b^3+abb, & sic de cæteris.

Vbi notandum est, quòd per a^2 vel b^3, similesve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quòd omnes ejusdem lineæ partes, quando unitas in quæstione non est determinata, æque-multis semper dimensionibus exprimi debeant, ut hîc a^3 tot habet dimensiones, quot abb, aut b^3, ex quibus composita est linea, quam nominavi $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$; Sed hoc non est necesse, cùm unitas determinata existit, quoniam illa ubique subintelligi potest, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimensiones reperiuntur. Vt si radix Cubica sit extrahenda ex $aabb-b$, cogitandum est, quantitatem $aabb$ semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam. F

Cæterùm ut quis facilè linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ

AB ∞ 1, hoc est, AB æqualis est 1, seu unitati.
GH ∞ n
BD ∞ b, &c.

G *Quomodo ad Æquationes perveniendum*

Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessa-

sit, quæ resolvendis Problematis inserviunt. cessariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependeant, donec inventâ fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim sunt termini modi unius terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.

GG Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitùs esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.

GGG Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis

H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surde-solidum, sive quadrato-cubus, &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum, pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo.

$z \propto b$, aut
$z^2 \propto -az+b^2$, aut
$z^3 \propto +az^2+b^2z-c^3$, aut
$z^4 \propto +az^3+b^2z^2-c^3z+d^4$, &c.

Hoc

Hoc eſt, z, quam pro quantitate incognita ſumo, eſt æqualis ipſi b; aut quadratum à z æquale eſt quadrato ex b, minus producto ex a in z; aut cubus à z æqualis eſt producto ex a in quadratum ipſius z, plus quadrato ex b ducto in z, minus cubo ex c. & ſic de cæteris.

Poſſunt autem ſemper quantitates incognitæ ita ad unam ſolam reduci, atque tum Problema conſtrui per rectas lineas & circulos, aut per ſectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonniſi uno duobuſve gradibus magis ſit compoſita.

Sed nolo hîc prolixus eſſe, ut hoc magis particulatim explicem, eò quod vobis voluptatem præriperem diſcendi id ipſum veſtro marte, & utilitatem ingenium veſtrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem judicio, præcipua eſt, quam ex hac ſcientia percipere licet. Deinde etiam, quòd nihil hîc adeò difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra verſati ſunt, & obſervaturi porrò ſunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non poſſit.

Atque ideo ſufficiet, Vos monere, ſi quis in reducen- 1 dis hiſce Æquationibus non omiſerit uti diviſionibus omnibus quæ fieri poſſunt, ipſum quoque infallibiliter habiturum ſimpliciſſimos terminos, ad quos quæſtio reduci poſſit.

Quænam ſint Problemata Plana.

Iam verò ſi illa per Geometriam communem reſolvi poteſt, hoc eſt, utendo tantùm rectis lineis & circularibus, in plana aliqua ſuperficie deſcriptis, poſtquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquetur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione ejus radicis, multiplicatæ per quantitatem ali-

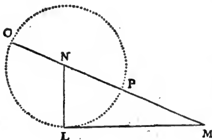
quam cognitam, & alterius cujusdam quantitatis cognitæ.

Quomodo ipsa resolvantur.

Tuncque radix illa, sive incognita linea, facilè invenitur. Nam si, exempli gratiâ, habeatur

$$zz \infty az + bb,$$

facio triangulum rectangulum N L M, cujus unum latus L M sit æquale b, radici videlicet quadratæ quantitatis cognitæ bb, alterum autem latus L N æquale $\frac{1}{2}a$, semissi nimirum reliquæ quantitatis cognitæ, quæ multiplicata est per z, quam suppono lineam esse incognitam. Deinde productâ M N, basi ejusdem



K triangulì, usque ad O, ita ut N O sit æqualis N L: erit tota O M æqualis z, lineæ quæsitæ. Quæ quidem sic exprimitur

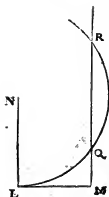
$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Quòd si verò habeatur $yy \infty -ay + bb$, atque y sit quantitas, quam invenire oportet, facio rursus idem triangulum N L M, & à basi ejus M N aufero N P, æqua-

L lem N L, eritque reliqua P M, æqualis y, radici quæ-

M sitæ. Ita ut fiat $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. P M enim esset x^2, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: atque ita de aliis.

Deni-



Denique si habeatur
$zz \propto az - bb$:
facio NL æqualem $\frac{1}{2}a$, & LM æqualem b, ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis casibus, sed duco MQR parallelam ipsi LN; centroque N descripto per L circulo, secante MQR in punctis Q & R, erit MQ vel MR æqualis lineæ quæsitæ z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur, nimirum $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel etiam $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Quòd si circulus centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat constructionem Problematis propositi esse impossibilem. N

Cæterum possunt hæ ipsæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; sed prædictos tantùm in medium afferre volui, velut admodum simplices, ut hâc ratione pateat, Problemata omnia Geometriæ communis construi posse, faciendo tantùm ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo à Veteribus fuisse animadversum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quòd ipsis non constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quòd solummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissimè liquet. Vbi postquam aliquamdiu in recensendis illis omnibus, quæ ab antecessoribus suis in Geo-

Quæstio desumpta ex Pappo.

Geometria ſcripta ſunt, occupatus fuit, tandem de quæſtione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius penitùs reſolvere potuerat, his verbis:

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm Conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Paulò autem poſt explicat, quæſtionem illam eſſe hanc ſequentem.

At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit poſitione datum ſolidum locum, hoc eſt, unam ex tribus conicis ſectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit: ſimiliter punctum datam coni ſectionem poſitione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, ſed lineas tantùm dictas; quales autem ſint, vel quam habeant proprietatem, non conſtat: earum unam, neque primam, & quæ manifeſtiſſima videtur, compoſuerunt, oſtendentes utilem eſſe, propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto, ad poſitione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit

ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad ſolidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum poſitione datam lineam continget. Si autem ad ſex, & data ſit proportio ſolidi tribus lineis contenti ad ſolidum, quod tribus reliquis continetur; rurſus punctum continget poſitione datam lineam. Quòd ſi ad plures quàm ſex, non adhuc habent dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus.

Vbi velim ut ex occaſione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica uſitatis, ad operationes Geometricas ſignificandas, liberè uti noluerint, ſæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obſcuros incidiſſe, cujus rei non alia potuit cauſa eſſe, quàm quòd non ſatis accuratè perceperint, quænam ſit inter illas duas ſcientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

Acquieſcunt autem his, qui paulò ante talia interpretati ſunt, neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones hæc, & dicere, & demonſtrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, ſi ſint ſeptem; ſi verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget poſitione datas lineas. Et ſimiliter quotcunque ſint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas reſpondeant, nullum igitur poſuerunt, ita ut linea nota ſit &c.

Quæstio itaque quam Euclides resolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, sed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujusmodi.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, sub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, si sint quatuor; Aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum; Aut si sint septem, ut hoc, quod producitur ex multiplicatione quatuor ductarum in se invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producitur; Aut si sint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter se multiplicatis producitur, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæstionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia semper infinita sunt puncta, quæ satisfacere possunt iis, quæ hîc quæruntur, requiritur insuper, ut cognoscatur atque describatur linea, in quâ illa omnia reperiantur.

Dicit autem Pappus, si tantùm 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex sectionibus Conicis existere. Verùm non suscipit ipsam determinare neque describere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæsita puncta inveniri debent, quando quæstio proposi-

ta

ta est in pluribus lineis. Tantùm addit, quòd Veteres unam ex illis sibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem esse monstrarunt, sed quæ manifestissima videretur, nec tamen prima existeret. Quod occasionem mihi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè longè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæstio in tribus, quatuorve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæsita per simplicem semper Geometriam inveniri queant; hoc est; ut non nisi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum est, faciamus. Præterquam si quinque lineæ dantur, quæ omnes inter se parallelæ fuerint. Quo casu, ut & quum quæstio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæsita puncta per Solidorum Geometriam inveniri possunt; hoc est, adhibendo, ad constructionem, aliquam ex tribus Conicis sectionibus. Excepto tantùm, si novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter se parallelæ existant. Quo casu, ut & quum quæstio in 10, 11, 12, aut 13 lineis proposita est, quæsita puncta per curvam lineam, quæ uno tantùm gradu magis composita est, quàm sectiones Conicæ, inveniri possunt. Excepto in 13, quæ omnes inter se sint parallelæ. quo casu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu supra præcedentem composita est. Atque ita in infinitum.

Responsum ad Quæstionem Pappi.

Deinde inveni quoque, si tantùm tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæsita puncta, non modò in aliqua trium Conicarum sectionum, sed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et si 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compositis, quàm sectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, imaginari licet. Sed pos-

ſunt rurſus illa etiam in ſectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter ſi 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non niſi uno gradu ſupra præcedentes poterit eſſe compoſita: quemadmodum etiam nullam earum imaginari licet, quæ ibidem utilis eſſe non poſſit. Atque ita porrò in infinitum.

Denique prima & poſt Conicas ſectiones ſimpliciſſima, ea eſt, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ interſectionem deſcribi poteſt, quemadmodum pòſt explicabitur. Adeò ut exiſtimem, me prorſus ſatisfeciſſe iis, quæ Pappus nobis commemorat hîc à Veteribus fuiſſe quæſita. quorum quidem demonſtrationem paucis ſubjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re ſcripſiſſe.

Sint AB, AD, EF, GH, &c. lineæ quotcunque poſitione datæ, oporteatque invenire punctum, ut C, à quo

à quo si ducantur totidem aliæ ad positione datas; ut CB, CD, CF, & CH, in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ut hoc, quod producitur ex multiplicatione certarum quarundam harum linearum, sit æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. id enim quæstionem difficiliorem non reddit.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque ut ex harum omnium linearum confusione me expediam, considero unam ex datis, atque unam ex quæsitis, exempli gratiâ, AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum segmentum lineæ AB, quod intra puncta A & B continetur, vocari x. BC autem vocari y. aliasque lineas datas omnes productas esse, donec secent hasce duas, etiam productas, si opus fuerit, & ipsis non sint parallelæ. quemadmodum hîc apparet illas secare, lineam quidem AB in punctis A, E, & G; BC verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli ARB dati sunt, data quoque erit ratio, quæ est inter ejus latera AB & BR, quam pono ut z ad b, ita ut, cum AB sit x, RB futura sit $\frac{bx}{z}$, CR autem $y+\frac{bx}{z}$: siquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam si R caderet inter C & B, CR esset $y-\frac{bx}{z}$; sin verò C caderet inter B & R, CR foret $-y+\frac{bx}{z}$. Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli DRC, unde & ratio, quæ est inter latera CR & CD, quam pono ut z ad c: ita ut, cum CR sit $y+\frac{bx}{z}$, CD futura sit $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Postea, quia lineæ AB, AD, & EF positione datæ sunt, data quoque erit distantia puncti A à puncto E: quæ si nominetur k, habebitur EB æqualis $k+x$; foret autem ipsa $k-x$,

Quomodo ponendi sint termini in hac Quæstione, ut ad Æquationem deveniatur.

ſi punctum B caderet inter E & A; at verò $-k+x$, ſi E caderet inter A & B. Rurſus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S: quam ſi ponam eſſe ut z ad d, B S fiet $\frac{dk+dx}{z}$, C S verò $\frac{zy+dk+dx}{z}$; quæ quidem foret $\frac{zy-dk-dx}{z}$, ſi punctum S caderet inter B & C; at verò $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, ſi C caderet inter B & S. Porrò dantur tres anguli trianguli F S C, & conſequenter ratio ipſius C S ad C F, quæ ſit ut z ad e, unde tota C F erit $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Eodem modo, data eſt A G, quam voco l, unde B G erit $l-x$, & quia in triangulo B G T ratio ipſius B G ad B T data eſt, quæ ſit ut z ad f, erit B T $\infty \frac{fl-fx}{z}$, & C T $\infty \frac{zy+fl-fx}{z}$. Rurſus, propter triangulum T C H, data eſt ratio ipſius C T ad C H: quam ſi ponamus ut z ad g, habebitur C H $\infty \frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Atque ita videre eſt, quòd, poſitione datis quotcunque lineis, ex puncto C ſemper totidem aliæ ad illas duci poſſint in datis angulis, (juxta quæſtionis tenorem;) quæ ſingulæ exprimantur ad ſummum per tres terminos; quorum quidem unus compoſitus ſit ex quantitate incognitâ y, multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitam; ſecundus verò ex incognitâ quantitate x, etiam multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantùm, ſi datæ lineæ ſint omnes parallelæ, vel lineæ A B, (quo caſu terminus ex quantitate x compoſitus evaneſcet;) vel etiam lineæ C B, (quo caſu terminus ex quantitate y compoſitus evaneſcet;) quemadmodum id plus ſatis per ſe manifeſtum eſt, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem ſpectat ad ſigna

gna + & —, quibus hi termini conjunguntur, ipsa quidem variari possunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita hasce lineas in se invicem, quantitates x & y, quæ in producto reperiuntur, singulæ non plures dimensiones habere possint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inserviunt.) quæ ita sunt multiplicatæ. Adeò ut nunquam plures duabus habituræ sint dimensiones, ubi productum illud ex duarum tantùm linearum multiplicatione nascitur; nec plures tribus; cùm productum illud ex trium tantùm linearum multiplicatione genitum fuerit, & sic in infinitum.

Quo pacto cognoscatur, Problema hoc esse planum, quando illud in quinque tantùm lineis est propositum.

Cæterùm quia ad determinandum punctum C una duntaxat conditio adimplenda est, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur sit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione: possumus ad libitum assumere alterutram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, si quæstio in quinque tantum lineis proposita fuerit, quantitatem x, quæ quidem expressioni primæ lineæ non inservit, posse semper non plures quàm duas dimensiones recipere. Ita ut, si pro y sumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantùm $xx \propto + \text{vel} - ax + \text{vel} - bb$. Et tum quidem quantitatem x invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum superiùs explicatum fuit. Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujusmodi est punctum C, quorum ope quæsita curva linea describetur.

Fieri

Fieri etiam poteſt, quum quæſtio in ſex aut pluribus lineis proponitur, ſi inter datas fuerint, quæ ipſi A B vel B C parallelæ exiſtant, ut una duarum quantitatum, x, y, duas tantùm aut etiam unam in Æquatione dimenſiones habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri poſſit. Sed contra, ſi omnes ſint parallelæ, etiamſi quæſtio in quinque tantùm lineis propoſita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas x nuſquam in Æquatione reperitur, permiſſum non erit ampliùs pro illa, quæ y vocata fuit, quantitatem cognitam aſſumere, cum hæc ea ipſa futura ſit, quam quærere oportet. Et quandoquidem illa tres dimenſiones habebit, non poterit ipſa niſi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, niſi ad id aliqua ad minimum Conica ſectio adhibeatur, fieri nequit. Rurſus, licèt lineæ ad novem uſque datæ ſint, dummodo non ſint omnes parallelæ, ſemper fieri poteſt, ut Æquatio non altius quàm ad quadrato-quadratum aſcendat. quare ipſa per Conicas ſectiones reſolvi quoque ſemper poterit, eo modo, quem poſtea ſum explicaturus. Ac denique, licèt habeantur uſque ad 13 lineas, efficere ſemper poſſumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde reſolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu ſupra ſectiones Conicas eſt compoſita, quemadmodum etiam poſt explicabitur. Atque hoc primum eſt, quod hîc eram demonſtraturus; ſed antequam ad ſecundum progrediar, opùs eſt ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

GEO-

GEOMETRIÆ

LIBER SECVNDVS.

De natura linearum curvarum.

VEteres optimè conſiderârunt, quòd Geometriæ Problematum alia ſint Plana; alia Solida; alia denique Linearia; hoc eſt, quòd quædam eorum conſtrui poſſint, ducendo tantùm rectas lineas & circulos; cum alia conſtrui nequeant, niſi ad minimum adhibeatur Conica aliqua ſectio; ac reliqua denique, quin ad conſtructionem eorum aſſumatur alia quædam linea magis compoſita.

Quænam ſint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi poſſunt.

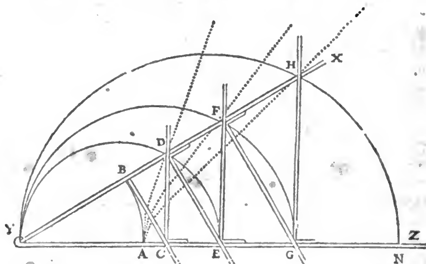
Verùm ſatis mirari non poſſum, quòd non ulteriùs progreſſi lineas haſce magis compoſitas in certos diſtinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint. Etenim, ſi dicatur, ideo id fuiſſe factum, quòd inſtrumento quodam, ad illas in plano deſcribendas, uti opùs ſit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem rejiciendæ eſſent: cum abſque circino & regula, quæ non minùs inſtrumenta dicenda ſunt, in charta deſcribi non poſſint. Neque etiam ideo, quòd inſtrumenta, quæ deſcribendis illis inſerviunt, utpote magis compoſita quàm regula & circinus, nequeant eſſe tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis convenientia, quæ à manu proficiſcitur, deſideratur, quàm ex Geometria, ubi ſolùm ſpectatur exacta ratiocinatio. quippe quæ proculdubio, tam haſce lineas quàm illas concernens, æquè perfecta eſſe poteſt. Neque tandem

ea de caussa, quòd numerum postulatorum suorum augere noluerint; quodque contenti fuerint, modò liceret; data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum describere, transeuntem per datum punctum: cum ulteriùs, ut de Conicis sectionibus tractarent, supponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano secare. Vbi sanè ad describendum lineas omnes curvas, quas hîc introducere instituo, nihil aliud supponere est opùs: quàm ut duarum pluriumve linearum una per alteram moveri possit, ita ut illarum intersectiones alias designent; siquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem est, quòd sectiones Conicas non omnino in Geometriam suam receperint; neque etiam nomina, quæ usu approbata sunt, immutare volo; veruntamen evidens admodum est, ut mea fert opinio, quòd, si Geometricum censeamus illud, (ut fieri solet) quod omnino perfectum atque exactum est, & Mechanicum quod ejusmodi non existit; atque Geometriam consideremus ut scientiam, quæ generaliter mensuras omnium corporum cognoscere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maximè compositæ, quàm omnium simplicissimæ: siquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui se mutuò consequantur, quorumque posteriores à prioribus regantur, imaginari possumus. Hâc enim ratione exactam semper illarum mensuræ cognitionem habere licet. Verùm enimverò fieri potest, ut scrupulus, quem sibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm sectiones Conicæ compositis, injecerunt, fuerit, quòd primæ, quas considerarunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque similes; quæ reverâ non nisi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero sunt, quas hîc recipiendas autumo: quandoquidem illas duo-

bus

bus motibus deſcribi imaginamur, qui à ſe invicem ſunt diverſi, nec ullam inter ſe relationem habent, quæ exactè menſurari poſſit. Nam licèt poſtea examinaverint quoque Conchoïdem, Ciſſoïdem, & alias quaſdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non ſatis perſpectas habuerunt, neque etiam majorem earum quàm præcedentium rationem habuêre. Vel etiam videntes, quòd nondum niſi pauca, quæ ad Conicas ſectiones pertinerent cognoſcerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici poſſunt, quæ ignorarent, ſupereſſent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggrederentur. Sed quoniam ſpero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, hîc propoſito, exercitati erunt, non facilè quid in poſterum reperturi ſint, in quo hæreant, quod ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non abs re fore, ſi illos ad alia inveſtiganda, ubi ipſis nunquam materia ſe exercendi defutura ſit, invitem.

Sunto lineæ AB, AD, AF, & ſimiles, quas ſuppono deſcriptas eſſe ope inſtrumenti XYZ, quod compoſitum eſt ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cùm illa, quæ deſignatur per YZ, ſuper lineam AN immota manet, angulus XYZ aperiri claudique poſſit; &, illo omnino clauſo exiſtente, puncta B, C, D, E, F, G, H omnia in punctum A cadant; Sed prout aperitur, ut regula BC, quæ ipſi XY in puncto B normaliter adfixa eſt, propellat versùs Z regulam CD, quæ ſuper YZ incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rurſus, ut CD propellat DE, quæ ſimiliter ſuper YX incedit, parallela manens ipſi BC; deinde ut DE propellat EF; EF verò ipſam FG; hæcque denuo ipſam GH. Atque ita in infinitum, concipiendo ſemper alias atque alias, quarum ſucceſſivè una



alteram eodem modo propellit, & quarum aliæ eoſdem perpetuò angulos faciunt cum Y X, atque aliæ cum Y Z.

Iam verò dum ſic aperitur angulus X Y Z, punctum B deſcribit lineam A B, quæ circulus eſt; puncta autem D, F, H, ubi cæterarum regularum interſectiones fiunt, deſcribunt alias curvas A D, A F, A H, quarum poſteriores ordine magis compoſitæ ſunt quàm prima, hæcque magis quam circulus. Verùm non video quid impedire poſſit, quò minùs accuratè atque diſtinctè hujus primæ deſcriptionem concipiamus quàm circuli, aut Conicarum ſaltem ſectionum; neque etiam quid impedire queat, cur non ſecundam, tertiam, cæteraſque omnes, quæ ſic deſcribi poſſunt, æquè bene concipiamus atque primam; nec per conſequens cur non omnes recipiantur, ut Geometriæ contemplationibus inſerviant.

Ratio diſtinguendi eas in cer-

Poſſem huc adferre plures alios modos deſcribendi atque concipiendi lineas curvas, quæ magis magiſque gra-

gradatim in infinitum essent compositæ; verùm ut has omnes, quæ in rerum natura sunt, simul comprehendam, easque in certa genera ordine distinguam: aptiùs quidquam afferre nescio, quàm ut dicam, quòd puncta omnia illarum, quæ Geometricæ appellari possunt, hoc est, quæ sub mensuram aliquam certam & exactam cadunt, necessariò ad puncta omnia lineæ rectæ, certam quandam relationem habeant, quæ per æquationem aliquam, omnia puncta respicientem, exprimi possit. Et quòd, cùm æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut non ultra quadratum unius ex illis ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis; (sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ:) sed quòd, postquam æquatio ad tertiam aut quartam dimensionem duarum, aut unius è duabus quantitatibus indeterminatis ascendit, (siquidem hîc duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc secundi sit generis; & quòd, prout æquatio ad quintam aut sextam dimensionem ascendit, illa tunc sit tertii generis; & sic in infinitum de aliis.

ta genera; Et cognoscendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum.

Vt si scire cupiam cujus generis sit linea EC, quam suppono descriptam esse per intersectionem regulæ GL & plani rectilinei CNKL; cujus latus KN indefinitè productum est versùs C; quodque, dum movetur supra planum deorsum in recta linea, (hoc est, ut diameter ejus KL perpetuò applicata reperiatur alicubi lineæ BA, utrinque indefinitè continuatæ,) facit, ut regula GL rotetur circa punctum G, quoniam ipsi continuò sic admovetur, ut simul quoque semper transeat per punctum L: eligo rectam aliquam lineam, veluti AB, ut ad diversa ejus puncta referam omnia puncta

hujus curvæ lineæ CE: deinde eligo etiam punctum aliquod in AB, veluti A, ad ordiendum ab eo calculum. Dico autem, me utrumque eligere, quoniam liberum est, illa assumere, prout volumus. Nam licèt plurimi referat, quo pacto illa eligam, ut æquatio possit reddi brevior & facilior; tamen. quocunque tandem modo sumantur, fieri potest, ut linea ejusdem generis esse appareat. Quemadmodum facilè demonstrari potest.

Iam verò ad libitum sumens alquod punctum in curva, ut C, super quod suppono instrumentum, quod descriptioni ejus inservit, esse adplicatum, duco ex C lineam CB parallelam ipsi GA. Deinde quia CB & BA duæ sunt quantitates indeterminatæ & incognitæ, voco unam y, & alteram x. Porrò ut inveniam relationem unius ad alteram, considero etiam quantitates cognitas, quæ hujus curvæ lineæ descriptionem determinant, ut GA, quam voco a; KL, quam voco b; & NL pa-

N L parallelam ipsi G A, quam voco c. Tum dico, ut N L est ad L K, vel c ad b, ita C B, vel y, est ad B K, quæ ideo erit $\frac{by}{c}$; ac proinde B L $\frac{by}{c} - b$, & A L $x + \frac{by}{c} - b$. Denique ut C B est ad B L, vel y ad $\frac{by}{c} - b$, ita est G A, vel a, ad L A, vel $x + \frac{by}{c} - b$. adeò ut, si multiplicem secundam lineam per tertiam, producatur $\frac{aby}{c} - ab$, quod æquale erit $xy + \frac{by^2}{c} - by$, ei scilicet, quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, est hujusmodi, $y^2 \infty cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$. Ex qua cognoscitur, lineam E C esse primi generis, quemadmodum A illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola.

Quòd si in instrumento, quod ipsi describendæ inservit, loco rectæ lineæ C N K sumatur inventa hæc Hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet C N K L; interfectio hujus lineæ & regulæ G L, loco Hyperbolæ E C, aliam curvam describet, quæ secundi erit generis. Vt si C N K fuerit Circulus, cujus centrum L, describetur prima Conchoïdes Veterum; & si Parabola fuerit, cujus diameter K B, describetur curva linea, quam paulò ante dixi primam esse ac simplicissimam pro quæstione Pappi, cùm quinque tantùm lineæ positione datæ sunt. Sed si loco alicujus harum linearum primi generis sumatur quædam secundi, quæ terminet planum C N K L, describetur ejus ope alia tertii generis; aut si quædam tertii generis sumatur, describetur aliqua quarti, & sic in infinitum. Vt facilè ex calculo est cognoscere. Et sanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ descriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipsa ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, pote-

Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4; & Eutocium in commentariis in secund. librum Archimedis de sphæra & cylindro.

rit

rit ſemper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinentur.

Cæterùm lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adſcendat, ejuſdem generis eſſe pono cum illis, quæ ipſam tantùm ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adſcendit, ejuſdem generis cum illis, quæ ipſam tantùm ad Surdeſolidum perducunt. Et ſic de cæteris.

Cujus rei ratio eſt, quòd generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ aſcendunt ad Quadrato-quadratum; & ad Surdeſolidum omnes illas, quæ aſcendunt ad Quadrato-cubum, ita ut magis compoſitæ cenſeri non debeant.

Notandum autem eſt, quòd inter lineas cujuſque generis, licèt major pars æqualiter ſit compoſita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem ſervire poſſint, atque ad eadem Problemata conſtruenda; tamen quædam illarum ſint, quæ ſimpliciores exiſtant, quæque non tantam in ſua potentia extenſionem habeant. Vt, inter lineas primi generis, præter Ellipſin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter ſunt compoſitæ, etiam Circulus eſt comprehenſus, qui manifeſtò ſimplicior eſt. Et inter illas ſecundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ ſuam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamſi non tantam extenſionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejuſdem generis ſunt, tamen inter lineas primi generis poni non poſſunt.

Continuatio explicationis quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata.

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facilè erit progredi in demonſtratione reſponſi, quod paulò ante dedi ad quæſtionem Pappi. Primùm enim, cum ſupra oſtenderim, quòd, quando tantùm 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæſita puncta determinanda

nanda inservit, non ultra quadratum ascendat: evidens est, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, necessariò aliquam esse primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cùm non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio hæc tum ad summum non ultra Quadrato-quadratum ascendat, ac per consequens quæsita linea non nisi secundi aut inferioris generis esse possit. Et quòd, cùm non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum ascendat, ac per consequens, quæsita linea solummodo tertii aut inferioris generis existat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum positio omnifariam variari potest, & per consequens mutare tam quantitates cognitas, quàm signa + & — ipsius æquationis, modis omnibus, quos sibi quis imaginari queat: evidens est, nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, quando illa in 4 lineis est proposita; neque ullam secundi, quæ ibidem non inserviat, quando illa in 8 lineis est proposita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis est proposita. Et sic de reliquis.

Adeò ut nulla curva linea, quæ sub calculum cadit, atque in Geometriam recipi potest, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non sit utilis.

Sed oportet ut de his specialiùs agam; atque rationem inveniendi lineam quæsitam, cuilibet casui inservientem, exhibeam, quando tantùm 3 aut 4 lineæ datæ sunt; atque eàdem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur. *Solutio hujus quæstionis, cùm ipsa in 3 aut 4 tantùm lineis est proposita.*

Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, &

D GH,

G H, ſuperiùs datas, oporteatque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale eſt C, unde ſi ducantur quatuor lineæ C B, C D, C F, & C H, in datis angulis ad poſitione datas: ut C B multiplicata per C F tantundem producat ac C D multiplicata per C H. hoc eſt, poſitâ C B $\propto y$, C D $\propto \frac{czy+bcx}{zz}$, C F $\propto \frac{ezy+dek+dex}{zz}$, & C H $\propto \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$: æquatiô erit

$$yy \propto \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\right\} y \begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz.}$$

B Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm cg. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna +
BB & —. Vnde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut minor quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo D A G, oporteret & illud ſupponere in angulo D A E,

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando ſigna + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce poſitionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito eſſe impoſſibilem. Sed ſupponamus illam hîc poſſibilem eſſe, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $2m$, & loco $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{2n}{z}$; ſicque habebimus

$yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, cujus æquationis radix eſt

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

Rurſus autem abbreviandi causâ, pro $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus o, & pro $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{p}{m}$.

Cum enim quantitates hæ omnes datæ ſint, illas, ut placuerit, nominare poſſumus. Atque ita habebimus

$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. quæ longitudo eſſe debet lineæ BC, relinquendo AB, ſeu x, indeterminatam.

Vbi patet, ſi quæſtio in tribus aut quatuor tantùm lineis eſt propoſita, ſemper ejuſmodi terminos inveniri poſſe; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque + & — diverſimodè mutari.

His peractis, duco KI parallelam & æqualem ipſi AB, ita ut ex BC ſegmentum auferat BK, æquale ipſi m: quandoquidem hîc habetur $+m$; quod quidem aliàs addidiſſem ipſi BC, ducendo hanc lineam IK ad alteram partem, ſi illic fuiſſet $-m$; eamque nullo modo duxiſſem, ſi quantitas m prorſus defuiſſet. Deinde duco IL, ita ut linea IK ſit ad KL, ſicut z ad n. hoc

D 2 eſt,

eſt, ut, cùm IK eſt x, KL ſit $\frac{nx}{z}$. Atque hâc ratione innoteſcit etiam ratio, quæ eſt inter KL & IL, quam pono eandem, quæ eſt inter n & a: ita ut, cùm KL eſt $\frac{nx}{z}$, IL ſit $\frac{ax}{z}$: & facio ut punctum K cadat inter L & C; ſiquidem hîc habetur $-\frac{nx}{z}$; ubi aliàs L ſumpſiſſem inter K & C, ſi habuiſſem $+\frac{nx}{z}$. Neque omnino duxiſſem hanc lineam IL, ſi $\frac{nx}{z}$ defuiſſet.

C Hinc nihil mihi ampliùs reſtare video pro linea LC præter hoſce terminos: LC $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Vnde cognoſco, quòd, ſi nulli fuiſſent, punctum C repertum fuiſſet in linea recta IL; & ſi tales extitiſſent, ut inde radix extrahi potuiſſet, hoc eſt, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$

ſigno

ſigno + notatis, oo fuiſſet æqualis $4pm$, ſive etiam termini mm&ox, aut ox&$\frac{p}{m}xx$ nihilo fuiſſent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidiſſet, quæ quidem inventu difficilior non fuiſſet quàm I L. Sed ſi hoc non fiat, punctum C reperietur ſemper in aliqua trium Conicarum ſectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris ſit in linea I L, & linea L C una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, L C erit parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea I L, ordinatim adplicatur. Nimirum, ſi terminus $\frac{p}{m}xx$ non reperiatur, erit Conica hæc ſectio Parabola; at verò ſi denotetur ſigno +, erit Hyperbola; ac denique ſi ſigno —, erit Ellipſis. Excepto tantùm, cùm quantitas aam eſt æqualis quantitati pzz, & angulus I L C rectus: quo caſu, loco Ellipſis Circulus obtinebitur. CC

Quòd ſi hæc ſectio Parabola exiſtit, latus rectum æquale erit $\frac{oz}{a}$, diameterque ſemper in linea I L. atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex eſt, oportebit I N æqualem ſumere $\frac{amm}{oz}$; ita ut punctum I cadat inter L & N, ſi termini fuerint $+mm+ox$; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, ſi illi fuerint $+mm-ox$; aut denique ut N cadat inter I & L, ſi habeatur $-mm+ox$. Sed nunquam illic haberi poteſt $-mm$, eo modo, quo termini hîc ſunt poſiti. Poſtremò verò punctum N erit idem quod punctum I, ſi quantitas mm nulla ſit. Quâ quidem ratione inde facile eſt invenire hanc Parabolam per Problema 1^{mum} primi libri Conicorum Apollonii. CCC

Quòd ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire pun-

ctum M, quod illius centrum est, quòdque semper in linea recta I L cadit, ubi invenitur, sumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro I M. Ita ut, si quantitas o nulla est, centrum hocce cadat semper in punctum I. Et si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, erit punctum M ex eadem parte puncti L sumendum, respectu puncti I, si habeatur $+ox$; at si habeatur $-ox$, sumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, si habeatur $-ox$, centrum illud sumi debebit versùs L; & si habeatur $+ox$, debebit illud sumi versùs alteram partem. Postea figuræ rectum latus sumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæsita linea est Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæsita linea est Circulus, aut

aut Ellipſis, & habetur $-mm$; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas oo major eſt quàm $4mp$, & cùm habetur $+mm$. Quòd ſi verò quantitas mm non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & ſi ox nulla ſit, id ipſum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus tranſverſum, debet inveniri linea, quæ ſit ad hoc latus rectum, ut aam ad pzz, nimirum ſi latus hocce D rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, tranſverſum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hiſce caſibus ſectionis diameter erit in linea I M, eritque L C una earum, quæ ad ipſam ordinatim adplicantur. Ita ut, ſi fecerimus M N æqualem dimidio lateris tranſverſi, atque illam ex eadem parte puncti M ſumpſerimus quâ punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipſius diametri. Vnde porrò facile eſt dictam ſectionem invenire, per 2[dum] & 3[tium] Problema 1[mi] Libri Conicorum Apollonii.

Sed ſi, ſectione Hyperbolâ exiſtente, habeatur $+mm$; E & quidem quantitas oo nulla ſit, aut minor quàm $4pm$; oportebit ex centro M lineam ducere M O P parallelam ipſi L C, nec non C P ipſi L M, atque M O æqualem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem m, ſi non reperiatur quantitas ox. Deinde conſiderare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter ſit O P, & linea C P, quæ ad illam ſit ordinatim adplicata, cujuſque latus rectum ſit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, tranſverſum verò $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm ox nulla eſt: ſiquidem eo caſu latus rectum

fit

fit $\frac{2aamm}{pzz}$, & transversum $2m$. Ita ut inde facile sit illam invenire per 3^{tium} Problema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii.

Demonstratio ejusdem solutionis.

Quorum quidem demonstrationes perspicuæ sunt. Etenim, si componatur spatium aliquod ex quantitatibus, quas recto & transverso lateri assignavi, atque etiam segmento diametri N L, vel O P, juxta sensum 11^{mi}, 12^{mi}, & 13^{tii} Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compositum est quadratum lineæ C P, vel C L, quæ huic diametro ordinatim est adplicata. Vt in hoc exemplo, auferendo I M, quæ est $\frac{aom}{2pz}$, ab N M, quæ est $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$, relinquitur I N; cui si addatur I L, quæ est $\frac{a}{z}x$, fit summa N L; quæ ideo erit

$\frac{a}{z}x$ —

$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$. Hæc autem multiplicata per $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, quæ eſt figuræ latus rectum, provenit $x\sqrt{oo + 4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$, pro rectangulo. A quo auferendum eſt ſpatium, quod ſit ad quadratum ex N L, ut latus rectum ad latus tranſverſum. Hinc cum quadratum ex N L ſit $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo + 4mp}$, oportebit id ipſum dividere per aam, & multiplicare per pzz, propterea quòd hi termini rationem, quæ eſt inter latus tranſverſum & rectum, explicent, fietque $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + mm$. Hoc ergo ſi auferatur ex rectangulo præcedenti, invenictur $mm + ox - \frac{p}{m}xx$, pro quadrato lineæ C L: quæ proinde una eſt ex ordinatim adplicatis in Ellipſi, aut Circulo, ad ſegmentum diametri N L.

Iam verò ſi datas omnes quantitates numeris velimus explicare, ponendo, exempli gratiâ, E A ∞ 3, A G ∞ 5, A B ∞ B R, B S ∞ $\frac{1}{2}$ B E, G B ∞ B T, C D ∞ $\frac{1}{2}$ C R, C F ∞ 2 C S, C H ∞ $\frac{2}{3}$ C T; & quòd angulus A B R ſit 60 graduum; ac denique quòd rectangulum ſub duabus lineis C B & C F, ſit æquale rectangulo ſub duabus reliquis C D & C H; (quandoquidem hæc omnia data requiruntur, ut quæſtio ſit penitus determinata;) & quòd præterea A B ſit ∞ x, & C B ∞ y: inveniemus per modum, ſupra explicatum, $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$, & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: Ita ut B K fieri de-

beat 1, & K L semissis ipsius K I vel A B. Cumque angulus I K L sit 60 graduum, angulus I L K erit rectus. Quoniam autem I K seu A B vocata est x, K L erit $\frac{1}{2}x$, I L verò $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur z, erit 1; quæ autem a, erit $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quæ m, erit 1; quæ o, erit 4; & quæ appellabatur p, erit $\frac{3}{4}$: ita ut habeatur $\sqrt{\frac{4}{3}}$ pro I M, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pro N M. Et quia aam, quæ est $\frac{3}{4}$, hîc æquatur pzz, atque angulus I L C est rectus, linea curva N C invenitur esse circulus. Eodem modo reliqui casus omnes facilè examinari possunt.

Quid intelligendum sit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipsa inveniendi.

Cæterùm, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non ascendunt, omnes in eo sunt comprehensæ, quod jam explicavi; non solum Veterum Problema in 3 & 4 lineis hîc penitùs ad finem perductum est; sed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compositionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum
F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cùm in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejusdem lineæ puncta pro eo accipi possunt, quod est quæsitum. Etenim lineâ illâ existente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At si illa est Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotiescunque autem id evenit, potest perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam resolvi, similis existit. Quòd si verò linea, quæ sic quæsitum punctum determinat, uno gradu magis quàm sectiones Conicæ sit composita, ipsam eodem modo locum Sursolidum appellare licebit, atque ita
G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

lud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut sphærica, aut magis composita esse potest. Verùm summus scopus, quem sibi in hac materia Veteres præfixêre, fuit, ut ad Solidorum Locorum compositionem pervenirent; Et verisimile est, omne illud, quod Apollonius de Conicis sectionibus scripsit, eò tantùm, ut illam indagaret, respexisse.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere sumpsi, non posse alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsim complecti. Quod quidem id omne est, quod demonstrare susceperam.

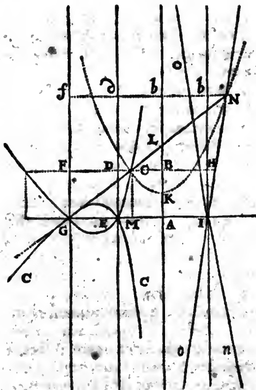
Quænam sit prima & simplicissima linearum curvarum, Veterum quæstioni inservientium, cùm ipsa quæstio in 5 lineis est proposita.

Quòd si Veterum quæstio in 5 lineis est proposita, quæ omnes sunt parellelæ; evidens est, quæsitum punctum semper in linea recta fore. Sed si in 5 lineis proposita fuerit, ita ut 4 illarum sint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos secentur; tum etiam, ut lineæ omnes à quæsito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ sunt, sit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, post præcedentem simplicissimus casus est, quem quis concipere potest:) punctum quæsitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ describitur, quemadmodum superiùs est explicatum.

Sint, exempli gratiâ, datæ lineæ A B, I H, E D, G F, & G A; & oporteat invenire punctum C; ita ut, ducendo C B, C F, C D, C H, & C M ad angulos rectos ad positione datas, parallelepipedum ex tribus C F, C D, & C H compositum, sit æquale parallelepipedo composito ex duabus reliquis C B, C M, & tertia data linea, quæ sit A I.

Pono C B $\propto y$, C M $\propto x$, A I vel A E vel G E $\propto a$; ita ut, existente puncto C inter lineas A B & D E, habeam C F $\propto 2a - y$, C D $\propto a - y$, & C H $\propto y + a$; & multiplicando hasce tres in se invicem, habeam $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, æquale producto trium reliquarum, quod est axy.

Post hæc considero lineam curvam C E G, quam



imaginor descriptam esse per intersectionem Parabolæ C K N, interea dum movebatur in linea recta A B, atque secabatur à regula G L, rotata circa punctum G, semperque transeunte per punctum L, in plano Parabolæ.

bolæ. Et facio KL ∞ a, latusque principale, hoc est, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale a, GA verò ∞ $2a$, CB seu MA ∞ y, & CM seu AB ∞ x. Deinde propter similitudinem triangulorum GMC & CBL, GM seu $2a - y$ est ad MC seu x, ut CB seu y ad BL, quæ ideo est $\frac{xy}{2a-y}$. Unde cum LK sit a, BK erit $a - \frac{xy}{2a-y}$, seu $\frac{2aa - ay - xy}{2a-y}$. Denique, quoniam eadem BK, quæ diametri Parabolæ est segmentum, se habet ad BC, quæ ipsi ordinatim est adplicata, ut BC se habet ad latus rectum, quod est a: calculus monstrat, quòd $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ æquabitur axy, & per consequens, quòd punctum C erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea CEG assumi potest; vel etiam in ejus adjuncta cEGc, quæ eodem modo describitur, præterquam quòd Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppositis NIo, nIO, quæ per intersectionem, quam linea GC facit in altero Parabolæ latere KN, describuntur.

Iam verò etiamsi datæ parallelæ AB, IH, ED, & GF non æqualiter inter se distantes essent, nec GA ipsas ad rectos angulos secaret, neque etiam lineæ à puncto C ad easdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum C reperiretur semper in linea curva, quæ ejusdem esset naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere potest, licèt nullæ ex datis lineis sint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ sunt, & quinta easdem secans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæsito puncto ductis, quarum una super quintam cadat, & aliæ duæ super duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo sub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæsitum

E 3 repe-

reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ. ſcilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicatæ ad diametrum æquales ſunt ordinatim adplicatis ad diametrum ſectionis Conicæ, cujuſque ſegmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicatas interjecta; eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipſa ad ſimilia diametri ſegmenta ſectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim ſunt adplicatæ. Neque aſſeverare auſim, hanc lineam non ſimpliciorem eſſe præcedenti; quam tamen pro prima ſumendam putavi: propterea quòd deſcriptio ejus ac calculus aliquo modo ſint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis caſibus inſerviunt, non immorabor iis per ſpecies diſtinguendis, neque enim omnia dicere ſuſcepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ tranſire debent, explicui, ſimul modum, quo deſcribendæ ſunt, me ſatis oſtendiſſe puto.

Quænam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur inveniendo plura earum puncta.

Ac proinde non è re fuerit, hîc conſiderare, magnum eſſe diſcrimen, inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad deſcribendam aliquam curvam lineam; atque illum, quo utimur in deſcriptione Spiralis & ſimilium. Quandoquidem hoc poſteriore modo, non indifferenter omnia quæſitæ lineæ puncta inveniuntur, ſed tantûm ea, quæ per menſuram aliquam ſimpliciorem determinari poſſunt, quàm eſt ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc eſt, nullum eorum, quæ ipſi ita propria ſunt, ut non niſi per illam inveniri poſſint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæſtioni propoſitæ inſerviunt, quod non inter illa, quæ modo ſupra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus deſcribendi lineam curvam,

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendo, ad illas tantùm se extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum describi possunt, non erit is omninò à Geometria rejiciendus.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus est modus, in quo filo seu chordâ complicatâ utimur, ad determinandam summam vel differentiam duarum pluriumve linearum rectarum, quæ à quolibet quæsitæ curvæ puncto duci possunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, sicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipsin & Hyperbolam. Nam licèt in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis similes videntur, hoc est, quæ modò rectæ, modò curvæ sunt, recipi possint; (cum ratio, quæ inter rectas & curvas existit, non cognita sit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognosci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum est, concludere possimus:) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis constructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoscitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

Quæ etiam illæ sint, quæ ope fili describuntur, & ibidem recipi possint.

Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt. Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem

H *Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, sufficiat scire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum;*

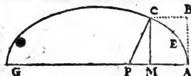
& modum ducendi lineas rectas, quæ ipsas secent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

nem spectat : ita ut non opus sit de his agere apertiùs. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuere possumus, ipsæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibusdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed si lineæ rectæ duci possint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos mensurare volumus, ipsis occurrunt, secent ad angulos rectos, vel, quod hîc pro

I eodem haberi volo, quæ earum contingentes secent: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm si à duabus rectis lineis comprehensi essent. Atque ideo confidam, me exposuisse hîc omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, postquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibusvis ipsarum punctis secent, ostendero. Nec verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ scio, utilissimum & generalissimum esse; sed etiam eorum, quæ in Geometria scire unquam desideraverim.

K

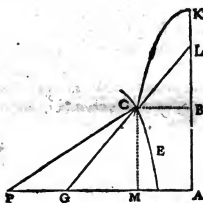
Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ secent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.



Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipsa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæsitam esse C P, quam produco usque ad punctum P, ut occurrat rectæ G A, quam suppono illam esse, ad cujus puncta referenda sunt puncta omnia lineæ C E: ita ut faciendo M A seu C B $\infty\, y$, & C M seu B A $\infty\, x$, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ est inter x & y, explicet. Deinde facio P C $\infty\, s$, & P A $\infty\, v$, seu P M $\infty\, v-y$. Vnde propter triangulum

lum rectangulum PMC invenio ss, quod est quadratum basis, æquale $xx + vv - 2vy + yy$, quadratis duorum laterum, hoc est, invenio $x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, aut $y \infty v - \sqrt{ss - xx}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ C E habent ad puncta rectæ G A) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y. Quod quidem facile est, si ubique pro x ponamus $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, & quadratum hujus summæ pro xx, & ejus cubum pro x^3, & ita porro; si fuerit x, quam tollere velimus; aut si fuerit y, ponendo ejus loco $v - \sqrt{ss - xx}$, & quadratum, cubumve, &c. hujus summæ, loco yy, aut y^3, &c. Ita ut inde semper restet æquatio, in qua non nisi una habeatur quantitas indeterminata x, vel y.



Quemadmodum si C E est Ellipsis, in qua M A sit segmentum diametri ad quam C M sit ordinatim adplicata, quodque pro latere recto habeat r; pro transverso autem q: fiet per 13^tium Theorema 1^mi libri Conicorum Apollonii: $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$. Vnde tollendo xx, restabit $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{ryy}{q}$, vel $yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ æquale nihilo. L. *Exemplum hujus Operationis in Ellipsi.*

F Præ-

Præstat enim hoc loco ita totam summam considerare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

Aliud Exemplum in Parabola secundi generis.

Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, ut superiùs fuit explicatum, & pro G A ponatur b, pro K L, c; & d pro latere recto, pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ est inter x & y, erit $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$. E qua auferendo x, habebitur $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Hoc est, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licèt puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ sese eo, quo dixi, modo non haberent; sed alio quolibet, quem sibi quis imaginari posset: poterit tamen nihilominus semper æquatio ejusmodi inveniri.

Tertium exemplum in Ovali, sive Ellipsi secundi generis.

Quemadmodum si C E est linea, habens ejusmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio G A ∞ b, A F ∞ c, sumendoque punctum C ad libitum

bitum in curva, ſuppono, quantitatem, quâ C F ſuperat F A, eſſe ad illam, quâ G A ſuperat G C, ſicut d ad e: ita ut ſi prior illa quantitas indeterminata vocetur z, F C ſit $c + z$, G C verò $b - \frac{ez}{d}$. Deinde ponendo M A $\propto y$, G M erit $b - y$, & F M $c + y$: & quandoquidem triangulum C M G rectangulum eſt, ſi auferam quadratum ex G M à quadrato ex G C, relinquetur quadratum ex C M, $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Non ſecus, ſi à quadrato ex F C auferam quadratum ex F M, relinquetur itidem quadratum ex C M in aliis terminis, videlicet $zz + 2cz - 2cy - yy$. Vnde cum hi termini præcedentibus ſint æquales, oſtendunt y ſeu M A fore $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Ac proinde, ſubſtituendo hanc ſummam loco y in quadrato ex C M, invenietur, illud exprimendum eſſe hiſce terminis $\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$.

Porrò ſuppono, lineam rectam P C occurrere curvæ C E ad angulos rectos in puncto C, faciendoque P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ut ante, P M erit $v - y$; habebiturque propter triangulum rectangulum P C M, $ss - vv + 2vy - yy$ pro quadrato ex C M. Vbi ſi rurſus pro y ſubſtituamus ſummam ipſi æqualem, exurget

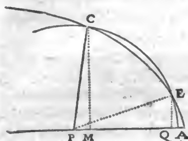
$$zz \frac{+ 2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} \propto 0,$$

pro æquatione, quam quærebamus.

Poſtquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoſcendas quantitates x, y, vel z, quæ

hîc datæ ſunt, quia punctum C eſt datum, ſed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæſitum punctum P determinant. In quem finem conſiderari debet: ſi punctum P tale eſt, quale deſideratur, quòd circulus, cujus id ipſum eſt centrum, quique per punctum C tranſit, tangat ibidem curvam lineam C E, nec ipſam ſecet. Sed quòd, ſi idem punctum P propiùs aut remotiùs ſumatur à puncto A, quàm oportet, circulus hic non ſolùm in puncto C, ſed etiam neceſſariò in alio quodam puncto curvam C E ſit ſecturus.

Deinde conſiderandum quoque eſt, quòd, quando hic circulus lineam curvam C E ſecat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia ſimilis quæritur, ſupponendo P A & P C eſſe cognitas, neceſſariò duas contineat radices, quæ ſunt inæquales. Nam ſi, exempli gratiâ, circulus hic ſecet curvam C E, in punctis C & E, ac ducatur E Q parallela ipſi C M: nomina quantitatum indeterminatarum x & y æquè bene convenient lineis E Q & Q A, atque ipſis C M & M A, exiſtente P E æquali P C, propter circulum. Adeò, ut quærendo lineas E Q & Q A, per P E & P A, (quæ tanquam cognitæ ſupponuntur) eandem habituri ſimus æquationem, quam ſi quærerentur C M & M A per P C & P A. Vnde liquidò conſtat, ipſius x, vel y, vel alterius ejuſmodi quantitatis, quam ſuppoſuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc eſt, æquationem duas admiſſuram radices, quæ ſunt inæquales; quarum quidem una futura eſt C M, & altera E Q, ſi fue-



fuerit *x*, quam quærimus ; aut quarum una futura eſt MA, & altera QA, ſi fuerit *y*, quæ quæritur. Verum equidem eſt, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum ſit vera, & altera inverſa ſeu minor quàm nihil: ſed quò hæc puncta C & E ſibi invicem ſunt propiora, eò quoque differentia inter radices haſce erit minor, quæ denique omnino inter ſe æquales futuræ ſunt, ſi bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc eſt, ſi circulus, qui per C tranſit, curvam CE ibidem tangat, nec omnino ſecet.

Præterea conſiderandum eſt, quòd æquatio, in qua duæ ſunt radices æquales, neceſſariò eandem formam habeat, ac ſi in ſe ipſam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam ſupponimus, multata quantitate cognitâ ſibi æquali : & deinde hæc ultima ſumma , ſi non tot dimenſiones habet, quot præcedens, rurſus per aliam ſummam multiplicetur , totidem , quot alteri deſunt, dimenſiones habentem , ſic ut ſeparatim æquatio inter ſingulos unius atque ſingulos alterius terminos haberi poſſit.

Vt, exempli causâ, dico, primam æquationem ſupra inventam, nimirum: $yy + \frac{qry - qvy + qvv - qss}{q - r}$, eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur, faciendo *e* æqualem *y*, atque multiplicando $y - e$ in ſe, unde exſurgit $yy - 2ey + ee$; ita ut ſeparatim ſingulos earum terminos inter ſe comparare poſſimus, ac dicere: quòd, poſtquam primus terminus, qui eſt *yy*, in utraque æquatione planè idem

 eſt,

eſt, ſecundus, qui in una eſt $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, ſit æqualis ſecundo alterius, qui eſt $-2ey$. Vnde quærendo quantitatem v, quæ quantitatem lineæ P A deſignat, invenietur $v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$. vel quia e æqualem ſuppoſuimus ipſi y, habebitur $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Non ſecus inveniri quoque poſſet s per tertium terminum $ee \propto \frac{2qvv - qss}{q - r}$; ſed quia quantitas v ſatis determinat punctum P, quod ſolum quærebamus, neceſſe non erit ulteriùs progredi.

Eâdem ratione ſecunda æquatio ſuperiùs inventa: nempe,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{array}{l} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +4bcd \\ -2ddv \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{array}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

eandem debet habere formam, quam ſumma, quæ producitur multiplicando $yy - 2ey + ee$ per
$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, quæ eſt

$$y^6 \left.\begin{array}{l} +f \\ -2e \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{l} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{array}\right\} y + eek^4:$$

ita ut ex binis hiſce æquationibus alias ſex eliciam, quæ ad inveniendas ſex quantitates f, g, h, k, v, & s inſerviunt.

Vnde facilè eſt intelligere, quòd, cujuſcunque generis linea curva propoſita eſſe poſſit, tòt ſemper hoc procedendi modo æquationes reſultent, quot quantitates incognitas ſupponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquationes haſce disjungamus, tandemque quantitatem v (quæ quidem ea ſola eſt, qua indigemus, & cujus occaſione cæteræ quæruntur) inveniamus: oportet primò per ſecundum terminum quærere f, primam quantitatum incognitarum ultimæ ſummæ, invenieturque $f \propto 2e - 2b$.

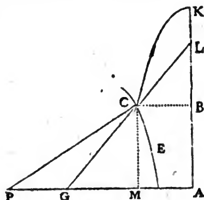
Dein-

Deinde per ultimum quærenda eſt k, ultima quantitatum incognitarum ejuſdem ſummæ, fitque $k^4 \infty \frac{bbccdd}{ee}$.

Porrò per tertium terminum quærenda eſt g, ſecunda quantitas, & fit $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Denique per penultimum invenienda eſt h, penultima quantitas, & fit $h^3 \infty \frac{2bccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Atque ita eodem ordine uſque ad ultimam progrediendum eſſet, ſi plures ejuſmodi quantitates in eadem ſumma haberentur: ſiquidem hoc eodem ſemper modo fieri poteſt.

Præterea per terminum, qui in hoc ipſo ordine ſequitur, atque hic quartus eſt, oportet inveſtigare v, & fit



$v \infty \frac{3e^3}{dd} - \frac{4bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}$.
vel, ponendo y loco e, quæ ipſi eſt æqualis, habebitur
$v \infty \frac{3y^3}{dd} - \frac{4byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$,
pro linea AP.

Simi-

Similiter quoque tertia æquatio, quæ eſt
$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv}$, eandem formam habet, quam
$zz - 2fz + ff$, ſupponendo f æqualem z: ita ut obtineatur rurſus æquatio inter $-2f$, vel $-2z$ & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$ Vnde cognoſcitur quantitatem v fore $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$..

Ideoque ſi componamus lineam A P ex hac ſumma, ipſi v æquali, cujus quantitates omnes ſunt cognitæ, atque à puncto ſic invento P rectam lineam ducamus versùs C, ſecabit ipſa ibidem curvam C E ad angulos rectos. Quod faciendum erat. Nec video quid impedire poſſit, quo minùs Problema hoc eodem modo ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum aliquem Geometricum cadunt, extendatur.

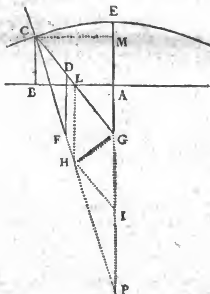
Et quidem quod ad ultimam ſummam attinet, quæ pro libitu ſumpta eſt ad implendum dimenſionum numerum alterius ſummæ, quando in illa quædam dimenſiones deſunt, quemadmodum paulò ante ſumpſimus $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, operæ pretium eſt ut advertamus, ſigna + & — talia ibi ſupponi poſſe, qualia quis voluerit, nec propterea lineam v, ſeu A P diverſam inveniri, ut facilè experienti conſtabit. Si enim demonſtrandis Theorematis omnibus, quorum hîc mentionem aliquam facio, immorarer, conſcribendus mihi eſſet liber multò major, quàm quidem mihi eſſet animus.

mus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una ſola naſcantur plures aliæ, (cujus hîc exempla vidiſtis,) infinitis aliis Problematis inſervire poſſit, neque una ex minimis, methodi, quâ utor, exiſtat.

Non adjungo conſtructiones, ſecundùm quas contingentes, ſive perpendiculares quæſitæ, poſt calculum, quem jam explicavi, ſunt ducendæ: quandoquidem illæ ſemper facilè inveniri poſſunt; etiamſi aliquâ ſæpe induſtriâ, ut breves atque ſimplices reddantur, opùs ſit.

Vt, exempli causâ, ſi C E eſt prima Conchoïdes Veterum, cujus G ſit Polus, & A B regula, cujus ope ducta N

Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoide.



eſt; adeò ut lineæ omnes rectæ, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E, & rectam A B continentur,

G (ut

(ut E A & C L) sibi invicem sint æquales: Velimusque rectam lineam ducere C F, quæ secet hanc Conchoïdem in dato puncto C ad angulos rectos: Quærendo juxta methodum, à nobis expositam, in linea A B punctum, per quod dicta linea C F transire debet, incidemus in calculum, nullo præcedentium breviorem; & nihilominus constructio inde elicienda valde brevis est. Oportet enim duntaxat in linea recta C G sumere C D æqualem C B, quæ perpendiculariter cadit in B A, & deinde ex puncto D ducere D F, parallelam G A, ac æqualem L G: quâ ratione habebitur punctum F, per quod quæsita linea C P est ducenda.

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium Opticæ inservientium.

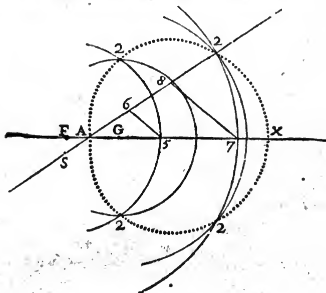
Cæterùm ut sciatis, considerationem curvarum linearum, hîc propositarum, non carere usu, & quòd illæ diversas habeant proprietates, quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus sectionum Conicarum, libet præterea hîc subjicere explicationem certarum quarundam Ovalium, quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utilissimas esse videbitis. Modus autem quo illas describo, talis est.

Primùm ductis rectis lineis F A & A R, sese intersecan-

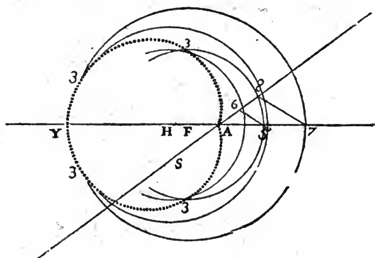
ſecantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, ſumo ad arbitrium in una ex ipſis punctum F, hoc eſt, propiùs aut remotiùs ab A puncto, prout Ovales haſce majores aut minores deſcribere animus eſt; atque ex puncto F, ceu centro, deſcribo circulum, tranſeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, ſecantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor ſit quàm A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones menſurat, ſi eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque ſumo punctum G in linea F A, ex eadem parte, quâ punctum 5 eſt ſumptum, hoc eſt, faciendo, ut lineæ A F & G A eam inter ſe rationem habeant, quam volumus. Poſtea poſitâ R A æquali G A in linea A 6, deſcribo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis ſit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ F G in puncto 1 ſecantem; quod quidem unum eſt ex illis, per quæ prima quæſitarum Ovalium tranſire debet. Similiter, deſcribo rurſus circulum ex centro F, qui tranſeat aliquantulum ultra citrave punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallelâ ipſi 5, 6, ex centro G deſcribo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 tranſit, ſecantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum eſt ejuſdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo ſemper alias atque alias lineas ipſi 7, 8 parallelas, nec non alios alioſque circulos ex centris F & G.

Quod ad ſecundæ Ovalis deſcriptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco A R ſumere oporteat A S ipſi A G æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G deſcripti, ad ſecandum eum, qui ex centro F per

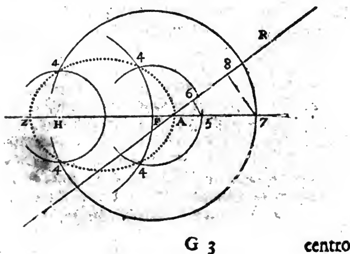
punctum 5 descriptus est, æqualis sumendus sit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, si illum, qui per punctum 7 transit, secare debeat. Atque ita de aliis. Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porrò quod spectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G sumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F est sumptum. Vbi ampliùs observandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipsam A F, quæ quoque nulla esse potest, ita ut punctum F idem sit, quod punctum A, in descriptione omnium harum Ovalium. Deinde postquam lineæ AR & A S sic ipsi A H sunt æquales factæ, ad describendam tertiam Ovalem A 3 Y, describo circulum ex centro H, cujus radius sit æqualis lineæ S 6, circulum ex centro F, descriptum per punctum 5, secantem



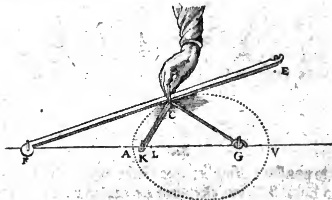
tem in puncto 3; similiterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, descriptum per punctum 7, secet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, describo circulos ex



 centro

centro H, quorum radii sint æquales lineis R 6, & R 8, atque similibus, qui reliquos circulos secent in punctis notatis 4.

Possent præterea infiniti alii modi excogitari ad describendas hasce Ovales. Vt, exempli causâ, ad describendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales: divido totam F G in puncto L; ita ut F L sit



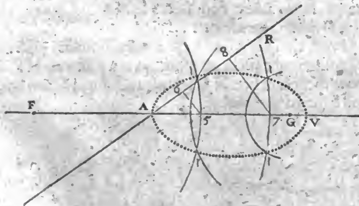
ad L G, sicut A 5 ad A 6. hoc est, ut ipsæ inter se rationem servent, quæ refractiones metitur. Deinde sectâ A L bifariam in K, facio rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipsam velut agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, se flectit à C versùs K, atque deinde rursus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum est alligatum; sic ut longitudo ipsius composita sit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc describat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipsi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

Ad hæc, etiamsi hæ Ovales ejusdem fermè naturæ viden-

videntur, ipſæ nihilominus quatuor diverſorum ſunt generum, quorum unumquodque ſub ſe infinita alia genera continet, & unumquodque rurſus tot diverſas ſpecies, quot facit Ellipſium aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, ſimileſve, conſiſtit, diverſa eſt, genus quoque ſubalternum harum Ovalium fit diverſum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovales quoque cujuſque ſubalterni generis mutantur ſpecie. Prout autem A G vel A H major vel minor eſt, ipſæ magnitudine quoque differunt. Quòd ſi verò lineæ A 5 & A 6 æquales ſumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, deſcribentur tantùm lineæ rectæ; ſed loco ſecundi, omnes Hyperbolæ; & loco ultimi, omnes Ellipſes.

Proprietates harum Ovalium concernentes reflexiones & refractiones.

Vlteriùs in qualibet harum Ovalium conſiderandæ ſunt etiam duæ partes, quæ diverſas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ eſt versùs A, facit ut radii, qui in aëre exiſtentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versùs G punctum, poſtquam in convexam vitri ſuperficiem inciderunt, qualis hîc eſt 1 A 1. Et in quo vitro refractiones ſic fiunt, ut juxta ea,



quæ

quæ in Dioptricis dicta ſunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut ſimiles, quarum ope hæc Ovalis deſcripta eſt, obtinetur, menſurari poſſint.

Verùm pars illa, quæ eſt verſùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes verſùs F reflectantur, ſi in ſuperficiem concavam ſpeculi inciderint, cujus figu-
P ra ſit 1 V 1; & quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.

In ſecunda Ovali, pars 2 A 2 ſimiliter reflexionibus inſervit, quarum anguli inæquales ſupponuntur. Si enim illa ſuperficiem ſpeculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, ſic reflecterentur, perinde ac ſi poſt reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum eſt, quòd, ſi linea A G multò major ſit aſſumpta quàm A F, ſpeculum hoc in medio verſùs A concavum ſit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis exiſtit, ut potiùs cor quàm Ovalem repræſentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre ſunt, ac tendunt verſùs F, ſe omnes incurvent verſùs G, tranſeundo ſuperficiem vitri, quod figuram illam habet.

Tertia Ovalis tota refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre exiſtentes verſùs F tendunt, in vitro ſe omnes verſùs H recipiant, poſtquam ſuperficiem
PP ejus tranſierunt, cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam verſùs A, ubi paululùm con-

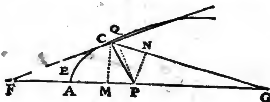
cava

cava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis. Differentia autem, quæ est inter duas ejus partes, in eo consistit, quòd punctum F uni ex illis propius sit quàm punctum H; quodque ab altera remotius quàm idem punctum H existat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inservit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in superficiem concavam alicujus speculi ejusdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujusque figura est A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G seu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipsibus & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata sunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum solummodo conversæ aut contrariæ sint, ex iis facilè deduci poterunt.



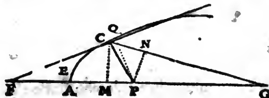
Verùm non omittenda est demonstratio ejus, quod dixi. In quem finem sumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium: deinde ducamus lineam rectam CP, quæ secet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile est, per Problema præcedens. Etenim, sumendo *b* pro AG, *c* pro AF, $c + z$ pro FC; supponendoque, quòd ratio, quæ est inter *d* & *e*, (quam hîc *Demonstratio harum proprietatum.*

 sem-

ſemper pro ea ſumam, quæ propoſiti vitri refractiones metitur) illam quoque, quæ eſt inter lineas A 5, & A 6, ſimilesve, quibus in Ovalis hujus deſcriptione uſi ſumus, deſignet: ipſi G C attribuit $b - \frac{ez}{d}$, invehiturque lineam A P eſſe $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$. ut ſupra eſt oſtenſum.

Porrò ex puncto P deductâ ſuper rectam F C perpendiculari P Q, nec non P N perpendiculari ſuper G C, conſiderandum eſt, num P Q ſit ad P N, ſicut *d* ad *e*, hoc eſt, ut lineæ, quæ vitri convexi A C refractiones metiuntur: hoc enim ſi fiat, radius, qui à puncto F venit ad punctum C, ita ſe ibidem incurvare debebit, intrando hocce vitrum, ut inde versùs G tendat. Quemadmodum ex iis, quæ in Dioptrica tradidi, manifeſtiſſimum eſt. Atque eapropter per calculum exploremus, num verum ſit, P Q eſſe ad P N. ſicut *d* ad *e*. Vt ſequitur.

Triangula rectangula P Q F & C M F ſimilia ſunt, unde liquet, C F eſſe ad C M, ut F P ad P Q; ac proinde



de F P multiplicatam per C M atque diviſam per C F, eſſe æqualem ipſi P Q. Eodem modo, triangula rectangula P N G & C M G ſimilia ſunt; unde ſequitur, G P multiplicatam per C M & diviſam per C G, eſſe æqualem ipſi P N. Deinde, quia multiplicationes vel diviſiones duarum quantitatum per eandem rationem,

nem, quæ inter ipsas est, non mutant: si F P multiplicata per C M, & divisa per C F, est ad G P, etiam multiplicatam per C M, & divisam per C G, sicut *d* ad *e*: dividendo utramque summam per C M, & deinde multiplicando utramque per C F, ac denuo per C G: relinquitur, F P multiplicatam per C G, in eadem ratione esse ad G P multiplicatam per C F, ut est *d* ad *e*. At verò per constructionem F P est $c \frac{+bcdd-bcde+bddz+eeez}{bde+cdd+ddz-eez}$, sive F P ∞ $\frac{bcdd+eedd+bddz+cddz}{bde+cdd+ddz-eez}$, & C G est $b-\frac{ez}{d}$ Vnde si multiplicemus F P per C G, proveniet

$$\frac{bbcdd+bcedd+bbddz+bcddz-bcdez-cedez-bdezz-cdezz}{bde+cdd+ddz-eez}$$

Similiter G P est $b \frac{-bcdd+bcde-bddz-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, sive G P ∞ $\frac{bbde+bcde-beez-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, & C F est $c+z$. Ideo si multiplicemus G P per C F, exurget

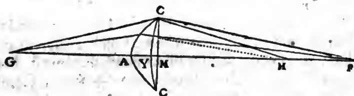
$$\frac{bbcde+bccde-bceez-cceez+bbdez+bcdez-beezz-ceezz}{bde+cdd+ddz-eez}$$

Et quia prima harum summarum divisa per *d*, eadem est quæ, secunda divisa per *e*: manifestum est, quòd F P multiplicata per C G sit ad G P, multiplicatam per C F, hoc est, quòd P Q sit ad P N, sicut *d* ad *e*. Quod demonstrandum erat.

Vbi sciendum, demonstrationem hanc se extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expositis Ovalibus fiunt, dictum est. Præterquam quòd aliud nihil quàm signa + & — in calculo sit mutandum. Quæ ideo unusquisque proprio marte examinare poterit, ita ut huic rei diutiùs immorari non sit opùs.

Sed oportet, ut nunc id præstem, quod in Dioptrica omisi, cùm ibi ostensum est, plurium diversarum figurarum vitra haberi posse, quæ singula faciunt, ut radii,

dii, ab eodem objecti puncto venientes, cogant rursus omnes in aliud punctum, postquam per illa transierunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa sunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter sunt convexa; cum hæc posteriora contra pro perspicillis sint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantùm illa, quæ ad praxin existimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere possit. Adeoque ne quid, quod ad ejus scientiæ Theoriam spectat, desiderari queat, explicanda hîc mihi superest vitrorum figura, quæ unam ex superficiebus suis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli sunt, colligantur rursus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præstant, & æqualiter ab utraque parte sunt convexa; aut in quibus convexitas unius superficiei datam habet rationem ad convexitatem alterius.



Quomodo vitrum fieri possit, cujus una superficies tam convexa aut

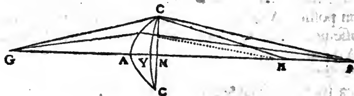
Ponamus igitur pro primo casu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipsi G A sunt paralleli, colligi debeant in puncto F, postquam vitrum transierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus superficiei interioris existente, extremitas

nitas sit in puncto C; ita ut chorda CMC, & sagitta YM, arcus CYC datæ sint. Quæstio eò recidit, ut primò considerandum sit, cujusnam ex Ovalibus jam explicatis superficies vitri YC figuram requirat, ad faciendum, ut radii omnes, qui intra illud existentes versùs idem punctum, ut H, quod nondum est cognitum, tendunt, egrediendo se versùs aliud punctum recipiant, ut F. Quippe nullus effectus est, rationem, quâ hi radii reflexione aut refractione detorquentur, concernens, qui per aliquam harum Ovalium produci non possit. Atque facilè cognoscitur, hunc produci posse per tertiæ Ovalis partem, paulò ante vocatam 3 A 3; aut etiam per ejusdem partem, nominatam 3 Y 3; aut denique per secundæ partem, appellatam 2 X 2. Et quia hæ tres sub eundem hîc calculum cadunt, pro una pariter atque pro altera punctum Y sumendum erit pro ipsarum vertice; C autem pro uno ex punctis, quæ in ipsarum sunt circumferentia; & F pro uno ex focis; post quæ tantùm punctum H quærendum restat, quod alter focus esse debet. Illud autem invenitur, considerando, quòd differentia, quæ est inter lineas FY & FC, se habere debeat ad differentiam, quæ est inter lineas HY & HC, sicut *d* est ad *e*, hoc est, ut major linearum, quæ vitri propositi refractiones metiuntur, ad minorem. Quemadmodum ex harum Ovalium descriptione perspicere licet. Et quoniam lineæ FY & FC datæ sunt, datur quoque ipsarum differentia, & per consequens etiam illa, quæ est inter lineas HY & HC: quandoquidem ratio, quæ inter duas hasce differentias consistit data est. Ampliùs, quia YM est data, datur quoque differentia, quæ est inter MH & HC; & tandem, quia CM est data, superest tantùm inveniendum MH, latus trianguli rectanguli CMH, cujus la-

concava sit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rursus in altero dato puncto

tus C M datum eſt, quemadmodum etiam differentia, quæ eſt inter C H baſin, & M H latus quæſitum. Vnde illud facilè inveniri poteſt. Si enim ſumatur *k* pro exceſſu, quo C H excedit M H, & *n* pro longitudine lineæ C M, habebitur $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pro M H.

Poſtquam igitur ſic inventum eſt punctum H, ſi illud longiùs reperiatur diſſitum à puncto Y, quàm inde diſtat punctum F, linea C Y debet eſſe prima pars Ova-



lis tertii generis, quæ ante nominata fuit 3 A 3: ſed ſi H Y minor eſt quam F Y, aut in tantum H F ſuperat, ut differentia ipſarum, ratione totius F Y, major ſit, quàm eſt *e*, minor linearum, quæ refractiones metiuntur, comparata cum *d* majore, hoc eſt, ut faciendo H F ∞ *c*, & H Y ∞ *c+b*, *dh* ſit major quàm 2 *ce+eb*, & tunc C Y debet eſſe ſecunda pars ejuſdem tertiæ Ovalis, quæ paulò antè vocata fuit 3 Y 3; ſed erit ſecunda pars Ovalis ſecundi generis, quæ ſupra nominata fuit 2 X 2, ſi *dh* æqualis vel minor eſt quàm 2 *ce+eb*. Et denique ſi punctum H illud ipſum eſt, quod punctum F, quod quidem non contingit, niſi cùm F Y & F C ſunt æquales, tum dicta linea Y C erit Circulus.

Poſt hæc quærenda eſt C A C altera hujus vitri ſuperficies, quæ debet eſſe Ellipſis, cujus focus H, ſi radii incidentes paralleli ſupponantur. Quo etiam caſu facile eſt illam invenire. Sed ſi ſupponantur à puncto G veni-

G venire, tum quidem ſuperficies illa debet eſſe prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci ſint G & H, quæque tranſeat per punctum C. unde porro invenitur punctum A, vertex ipſius Ovalis; conſiderando ſcilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliquâ, quæ ſit ad illam, quâ H A ſuperat H C, ſicut d ad e. Etenim, ſumptâ k pro differentia, quæ eſt inter C H & H M; ſi pro A M ſupponatur x, habebitur $x - k$, pro differentia, quæ eſt inter A H & C H. Deinde ſi ſumatur g pro differentia, quæ eſt inter G C & G M, quæ datæ ſunt, habebitur $g + x$ pro illa, quæ eſt inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima $g + x$ eſt ad alteram $x - k$, ſicut d ad e, habebitur $ge + ex \propto dx - dk$, hoc eſt, $\frac{ge + dk}{d - e}$, pro linea x vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

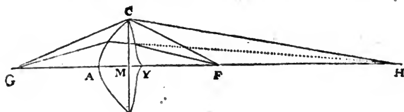
Quomodo aliud fieri poſſit, quod idem præſtet, cujuſque convexitas unius ſuperficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius.

Ponamus jam pro caſu altero, quòd tantùm dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ eſt inter lineas A M & M Y, & quòd invenienda ſit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coëant rurſus in punctum F.

Hîc autem rurſus duabus Ovalibus uti poſſumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, ſupponendo primùm punctum H, quod utrique eſt com-

commune, esse cognitum, quæro A M per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum sumendo k pro differentia, quæ est inter C H & H M, & g pro eâ, quæ est inter G C & G M. Vnde cùm A C est prima pars Ovalis primi generis, invenio $\frac{ge+dk}{d-e}$ pro A M. Deinde quæro etiam M Y per tria puncta F, C, & H, ita ut C Y sit prima pars Ovalis tertii generis; sumendoque y pro M Y, & f pro differentia, quæ est inter C F & F M, habebo $f+y$ pro ea, quæ est inter C F & F T: hinc cum habeam k pro illa, quæ est inter C H & H M, habebo $k+y$ pro ea, quæ est inter C H & H Y, quam scio esse debere ad $f+y$, sicut e ad d, propter Ovalem tertii generis. unde invenio y seu M Y esse $\frac{fe-dk}{d-e}$, ita ut addendo simul quantitates inventas pro A M & M Y, habeam $\frac{ge+fe}{d-e}$ pro tota A Y. E quibus manifestum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H suppositum fuerit, dicta linea A Y semper composita sit ex quantitate aliqua, quæ sit ad differentiam, quâ G C & C F simul sumptæ superant G F, ut est e minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propositi inserviunt, ad $d-e$, differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem satis scitum est Theorema.

Postquam igitur sic inventa est tota linea A Y, secanda est ipsa juxta rationem, quam inter se servare debent ejus partes A M & M Y; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per consequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm considerandum est priùs, num linea A M sic inventa, sit major quàm $\frac{ge}{d-e}$, an minor, an verò ipsi æqualis. Nam si major fuerit, cognoscitur



ſcitur inde, quòd curva A C eſſe debeat prima pars Ovalis primi generis, & C Y prima tertiæ, quemadmodum hîc ſuppoſitæ fuêre: cum aliàs, ſi minor fuerit, id indicet, quòd C Y debeat eſſe prima pars Ovalis primi generis, & A C prima pars tertiæ. Et denique ſi A M æqualis fuerit ipſi $\frac{ge}{d-e}$, quòd duæ hæ curvæ A C & C Y debeant eſſe duæ Hyperbolæ.

Poſſent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios caſus, quibus quidem deducendis ſuperſedeo, quòd nullum eorum uſum in Dioptricis deprehenderim.

Poſſem quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri ſuperficiebus data eſt, modò illa ſit aut plana, aut à ſectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus ſuperficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes tranſmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius eſt, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior eſt, quoniam via illuc perveniendi jam aperta eſt. Verùm malo alios id quærere, ut, ſi inter inveſtigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò pluris inventionem rerum hîc demonſtratarum æſtiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus ſum tantùm de *Quomodo id omne,*

 lineis

quod hic de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari posse ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva.

lineis curvis quæ in superficie aliqua plana describi possunt; verùm facile est, quæ de iis dixi, etiam ad omnes alias referre, quas imaginari possumus formatas esse, motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum. Nimirum demittendo duas perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam considerare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos se invicem secantia, unam ad unum, & alteram ad alterum: quippe perpendicularium harum extremitates singulæ duas alias curvas lineas describunt, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia modo superiùs explicato determinari ac referri possunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano est communis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimensiones habentis, omnino sint determinata. Ita etiam si rectam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato puncto ad angulos rectos secet, opùs tantùm est duas alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum singulæ singulas curvas ibidem secent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à dato puncto ad utrumque planum sunt deductæ. Etenim postquam duo alia plana, unum super unam, & alterum super alteram, erecta sunt, quæ ad utrumque planum, in quibus lineæ illæ sunt, recta existant, erit horum duorum planorum communis intersectio linea recta quæsita. Atque ita arbitror me omnia tradidisse Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem sunt necessaria.

GEO-

GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

De Constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

Quænam curvæ lineæ adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis.

TAmetsi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sunt recipiendæ, non ideo tamen permissum est uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujusque constructionem; sed cura semper adhibenda est, ut simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, eligamus. Vbi quidem observandum est, per simplicissimas non solùm intelligendas esse illas, quæ omnium facillimê describi possunt; neque quæ propositi Problematis constructionem vel demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim, quæ simplicissimi sunt generis, quod ad quantitatem quæsitam determinandam inservire queat.

Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium.

Quemadmodum, exempli causâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quàm si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum X Y Z (supra explicatum) describuntur. Etenim si inter Y A & Y E duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantùm circulum describere, cujus diameter sit Y E, qui curvam A D secet in puncto D, eritque Y D una ex quæsitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonstratio ex sola instrumenti hujus ad lineam Y D adplicatione perspicua est.

 Nam

Nam ſicut Y A ſeu Y B, quæ ipſi eſt æqualis, ſe habet ad Y C; ſic Y C ſe habet ad Y D; & Y D ad Y E.

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter Y A & Y G; aut ad inveniendas 6 inter Y A & Y N, deſcribendus eſt tantùm circulus Y F G, qui ſecans curvam A F in puncto F determinat lineam rectam Y F, quæ una eſt ex quatuor quæſitis proportionalibus; aut circulus I H N, qui ſecans curvam A H in puncto H determinat ipſam Y H, quæ una eſt ex ſex quæſitis proportionalibus. Et ſic de cæteris.

Verùm quia linea curva A D ſecundi eſt generis, & duæ mediæ proportionales inveniri poſſunt per ſectiones Conicas, quæ ſunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compoſitorum atque A F & A H: peccatum eſſet in Geometria, ſi illæ hîc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum eſſet, ſi quis inutiliter in.

con-

construendo Problemate aliquo per genus linearum simplicius, quàm natura ejus permittit, desudaret.

Quocirca ut hîc adducere possim regulas quasdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opùs est, ut in genere aliquid dicam de natura Æquationum; hoc est, de summis, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis sunt æquales, vel potiùs, qui omnes simul considerati nihilo sunt æquales. Quippe sæpe præstat illos hâc ratione considerare. *De natura Æquationum.*

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in qualibet Æquatione, tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones. Nam si, exempli gratiâ, x supponatur æqualis 2, seu $x - 2$ æqualis nihilo; & rursus $x \propto 3$, seu $x - 3 \propto 0$; & multiplicetur $x - 2 \propto 0$ per $x - 3 \propto 0$: habebitur $xx - 5x + 6 \propto 0$, seu $xx \propto 5x - 6$. quæ Æquatio est, in qua quantitas x valet 2, & præterea etiam 3. Quòd si rursus fiat $x \propto 4$, atque $x - 4 \propto 0$ multiplicetur per $xx - 5x + 6 \propto 0$, producetur $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$. quæ alia est Æquatio, in qua x habens tres dimensiones, tres quoque habet valores, qui sunt 2, 3, & 4. *Quot habere possint radices in qualibet Æquatione.*

A Verùm sæpe accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, utputa 5, ita ut habeatur $x + 5 \propto 0$, quæ multiplicata per $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$, faciat $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, pro Æquatione, in qua quatuor sunt radices, nimirum tres veræ, quæ sunt 2, 3, & 4, atque una falsa, quæ est 5. *Quænam sint falsæ radices.*

B Vnde liquidò constat, quòd Æquationis summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate inco- *Quomodo diminui possit dimensionum numerus ali-*

 gnita,

cujus Æquationis, quando cognoscitur aliqua ex ejus radicibus.

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis. cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.

C *Quâ ratione indagari queat, num data quantitas sit valor alicujus radicis.*

Et viciſſim si Æquationis summa dividi non possit per binomium, constans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio est, quantitatem hanc non esse valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, dividi quidem potest per $x - 2$, per $x - 3$, per $x - 4$, & per $x + 5$; sed nullo modo per x + vel — quacunque alia quantitate. Id quod ostendit, ipsam non posse admittere alias radices præter hasce quatuor 2, 3, 4, & 5.

D *Quot haberi possint veræ radices in qualibet Æquatione.*

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur. Vt in ultima, quia post $+x^4$ habetur $-4x^3$, quæ est una variatio signi + in —, & post $-4x^3$ habetur $-19xx$, quæ sunt duo signa similia; & post $-19xx$ habetur $+106x$; & post $+106x$ habetur -120, quæ sunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoscitur quòd illa tres admittat veras radices, & unam falsam, propter duo signa — terminorum $4x^3$ & $19xx$, quæ se invicem sequuntur.

E *Quomodo faciendum sit, ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falsæ.*

Porrò facile est efficere, ut in una eademque Æquatione radices omnes, quæ falsæ erant, evadant veræ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ veræ erant, falsæ fiant. Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2^dis^, 4^tis^, 6^tis^ aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1^mi^, 3^tii^, 5^ti^, similiumque locorum,

rum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.

Vt si loco

$$+x^4-4x^3-19xx+106x-120 \infty 0,$$

scribatur

$$+x^4+4x^3-19xx-106x-120 \infty 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm est vera radix, quæ est 5; & tres falsæ, quæ sunt 2, 3, & 4.

Quòd si verò non cognito radicum alicujus Æquationis valore, ipsas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantùm in locum incogniti termini substituere alium, qui eâdem hâc quantitate major sit vel minor, eumque ubique primi loco subrogare. *Quomodo augeri vel diminui possint Æquationis radices, ipsis non cognitis.*

Vt si augere velimus $3^{nariò}$ radicem hujus Æquationis $x^4+4x^3-19xx-106x-120 \infty 0$, sumenda est y loco x, & cogitandum, quantitatem hanc y majorem esse quàm x, excessu 3, ita ut $y-3$ ipsi x sit æqualis; loco autem xx scribendum est quadratum ex $y-3$, quod est $yy-6y+9$; & loco x^3 sumendus est ejus cubus, qui est $y^3-9yy+27y-27$; & denique loco x^4 ponendum est ejus quadrato-quadratum, quod est $y^4-12y^3+54yy-108y+81$. Vnde si scribamus summam præcedentem, substituendo ubique y pro x, invenietur F

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4-12y^3 & +54yy & -108y & + & 81 \\
+\;4y^3 & -36yy & +108y & - & 108 \\
 & -19yy & +114y & - & 171 \\
 & & -106y & + & 318 \\
 & & & - & 120 \\
\hline
\end{array}$$

$$y^4-8y^3-1yy+8y\,*\,\infty 0, \text{vel } y^3-8yy-1y+8 \infty 0.$$

ubi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium ipsi additum.

Sin

Sin verò contra ternario radicem ejusdem Æquationis diminuere velimus, facienda est $y + 3 \infty x$, & $yy + 6y + 9 \infty xx$. Atque ita porrò. Ita ut loco

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0.$$

scribatur

$$\begin{array}{r} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 \\ - 19yy - 114y - 171 \\ - 106y - 318 \\ - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0. \end{array}$$

Quòd, augendo veras radices, falsæ diminuantur, & contra.

Vbi notandum est, dum veræ radices alicujus Æquationis augentur, falsas eàdem quantitate diminui; & contra, dum veræ diminuuntur, falsas augeri: Et quidem tum has tum illas prorsus evanescere, si quantitate ipsis æquali diminuantur; si verò quantitate ipsas superante, tum ex veris falsas evadere, & ex falsis veras. Vt hîc, augendo ternario veram radicem, quæ erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falsis; ita ut illa, quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, sit cyphra seu 0; & quæ erat 2, facta sit vera, sitque 1 (cum $-2 + 3$ faciat $+1$.) Adeò ut in hac Æquatione $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$, non plures quàm tres sint radices, inter quas duæ veræ existunt, utpote 1 & 8; & una falsa, quæ etiam est 1: Et in hac altera $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0$, una tantùm vera, quæ est 2, (quia $+5 - 3$ facit $+2$;) & tres falsæ, quæ sunt 5, 6, & 7.

Quâ ratione secundus terminus Æquationis tolli possit.

Iam verò beneficio modi hujus mutandi valorem radicum, ipsis non cognitis, duo fieri possunt, quæ in sequentibus usum aliquem habebunt. Vnum est, quòd semper secundus terminus Æquationis, quam examinamus, tolli possit: Nimirum, diminuendo veras radices,

G

dices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo $+$, & alter signo $-$; aut augendo illas eâdem quantitate, si uterque eodem signo fuerit adfectus.

Vt ad tollendum secundum terminum ultimæ Æquationis

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0,$$

divisis 16 per 4, propter 4^{or} dimensiones termini y^4, proveniet rursus 4: hinc facio $z - 4 \propto y$, & scribo,

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 - 16z^3 & + 96\,zz & - 256z & + & 256 \\
+ 16z^3 & - 192\,zz & + 768\,z & - & 1024 \\
 & + 71\,zz & - 568\,z & + & 1136 \\
 & & - 4z & + & 16 \\
 & & & - & 420 \\
\hline
z^4 \quad * & - 25\,zz & - 60\,z & - & 36 \propto 0.
\end{array}$$

ubi vera radix, quæ erat 2, est 6, cum ipsa quaternario sit aucta; & falsæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo sunt 1, 2, & 3, cum illæ quaternario singulæ sint diminutæ.

Eodem modo si tollere velimus secundum terminum Æquationis

$$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} + \frac{2aa}{} \\ - cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0:$$

quoniam divisis $2a$ per 4, quotiens fit $\frac{1}{2}a$, faciendum est $z + \frac{1}{2}a \propto x$, ac scribendum

$$\begin{array}{rrrr}
z^4 + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 \\
- 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 \\
 & + 2aazz & + 2a^3z & + \frac{1}{2}a^4 \\
 & - ccz z & - accz & - \frac{1}{4}aacc \\
 & & - 2a^3z & - a^4 \\
 & & & + a^4 \\
\hline
z^4 \quad * & + \frac{1}{2}aazz & - a^3z & + \frac{5}{16}a^4 \propto 0: \\
 & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc
\end{array}$$

 ubi

ubi postquam innotuit valor ipsius z, addendo ipsi $\frac{1}{2}a$, habebitur valor radicis x.

Quo pacto fiat ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falsæ.

Alterum, quod hîc postea usum aliquem habebit, est, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falsis, radices omnes veræ semper fieri possint, ita ut non habeantur duo signa +, aut duo signa —, quæ se invicem sequantur; & insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit. Nam licèt id fiat, etiamsi falsæ radices incognitæ sint; tamen facile est de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam assumere, quæ ipsas in tantum vel plus superet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H Vt si habeatur

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0:$$

faciendo $y - 6n \infty x$, invenietur

$$\begin{array}{llllll}
y^6 \begin{array}{r} -36n \\ +n \end{array}\Big\} y^5 &
\begin{array}{r} +540nn \\ -30nn \\ -6nn \end{array}\Big\} y^4 &
\begin{array}{r} -4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\Big\} y^3 &
\begin{array}{r} +19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\Big\} yy &
\begin{array}{r} -46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\Big\} y &
\begin{array}{r} +46656n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6. \end{array}
\end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4yy - 27216n^5y\ * \infty 0.$$

Vbi manifestum est, quòd $504nn$ (quantitas cognita tertii termini) major sit quadrato à $\frac{35}{2}n$ (semisse quantitatis cognitæ secundi termini.) Neque ullus alius est casus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ sunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hîc nullus reperitur, si id quidem non desideretur, augendus est adhuc aliquantillo valor radicum, quod sanè tam parum esse non potest, quin id ad effectum hunc sit satis.

Quomodo faciendum sit, ut loca omnia

Eodem modo si augere velimus dimensionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia termino-

minorum ejus ſint repleta (ut ſi loco $x^5 **** - b \propto 0$, deſideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas ſex dimenſiones habeat, & in qua nullus terminus deſit): oportet primùm pro $x^5 **** - b \propto 0$, ſcribere $x^6 *****$ $- bx \propto 0$; deinde factâ $y - a \propto x$, habebitur

Æquationis ſint completa.

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} - 6a^5 y \\ - b \end{matrix} \begin{matrix} + a^6 \\ + ab \end{matrix} \propto 0.$$

Vbi liquet, quòd, quantula etiam ſuppoſita fuerit quantitas a, omnia tamen Æquationis loca non deſinant eſſe repleta.

Quomodo multiplicari vel dividi poſſint Æquationis radices, ipſis incognitis.

Præterea poſſunt quoque radices alicujus Æquationis, etiamſi ſint incognitæ, multiplicari aut dividi per quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quod fit, ſupponendo, quantitatem incognitam, multiplicatam, aut diviſam per quantitatem, quæ multiplicare aut dividere debet radices, eſſe æqualem alicui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam ſecundi termini per hanc ipſam, quæ multiplicare aut dividere debet radices; & per ipſius quadratum, quantitatem tertii; & per ipſius cubum, quantitatem quarti, atque ita porrò uſque ad ultimum. Id quod inſervire poteſt, ut ad integros & rationales numeros reducantur fracti, aut ſæpe etiam ſurdi, qui in Æquationum terminis reperiuntur.

Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros.

Vt ſi habeatur

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \tfrac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0,$$

& ipſius loco alia deſideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur, oportet ſupponere $y \propto x\sqrt{3}$, & multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam ſecundi termini, quæ quoque eſt $\sqrt{3}$; & per ipſius quadratum, quod eſt 3, quantitatem tertii, quæ eſt $\tfrac{26}{27}$; & per ipſius cubum, qui eſt $3\sqrt{3}$, quantitatem ultimi, videlicet $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, id quod facit $y^3 - 3yy + \tfrac{26}{9}y - \tfrac{8}{9} \propto 0$.

Deinde si hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ solis integris numeris exprimantur; supponendo $z \infty 3y$, & multiplicando 3 per
I 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$ per 27, fiet Æquatio
$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0$. Vbi, cum radices sint 2, 3, & 4, sequitur alterius radices esse $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & prioris Æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ.

Quæ operatio servire quoque potest ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Vt si habeatur
$x^3 * - bbx + c^3 \infty 0$, & ipsius loco alia sit invenienda Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini, nimirum ea, quæ hîc est bb, sit $3aa$, non autem bb: supponendum est $y \infty x\sqrt{\frac{2aa}{bb}}$, deinde verò scribendum,
K

$$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0.$$

Quòd radices, tam veræ quam falsæ, possint esse reales, vel imaginariæ.

Cæterùm radices tam veræ quàm falsæ non semper sunt reales, sed aliquando tantùm imaginariæ: hoc est, semper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum est quantitas, quæ illis, quas imaginamur, respondet. Quemadmodum, tametsi tres imaginari possimus in hac, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$; tamen una tantùm est realis; nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, sicut jam exposui; tamen non nisi imaginariæ fieri possunt.

Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema est planum.

Iam verò, postquam ad inveniendam constructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimensiones: Primùm si quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipsi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi sunt; At si surdos continent, tum quantùm fieri potest, similiter

ad

ad rationales sunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quàm per diversos alios modos, inventu satis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ absque fractione ultimum terminum dividere possunt, videndum est, num aliqua ex ipsis, juncta cum quantitate incognita per signum + vel —, componere possit binomium, quod dividat totam summam; Id enim si contingat, Problema erit Planum, hoc est, construi poterit regulâ atque circino. Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; aut Æquatio, per ipsum divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat. L.

Exempli gratiâ, si habeatur
$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$; ultimus terminus, qui est 64, dividi potest absque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi possit per aliquod ex binomiis $yy - 1$ aut $yy + 1$, $yy - 2$ aut $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$, &c. invenitur dividi posse per $yy - 16$, hoc modo:

$$\begin{array}{lllll} + y^6 & - 8y^4 & - 124yy & - 64 \propto 0 \\ - 1y^6 & - 8y^4 & - 4yy & - 16 \\ 0 & - 16y^4 & - 128yy & \\ & 16 & 16 & \\ \hline & + y^4 & + 8yy & + 4 \propto 0. \end{array}$$

Incipio ab ultimo termino, & divido -64 per -16, quod facit $+4$, quæ repono in quotiente; deinde multiplico $+4$ per $+yy$, & fit $+4yy$, quare in summa dividenda repono $-4yy$. Quippe scribendum semper est signum + vel — planè contrarium illi, quod producitur per multiplicationem. Addendo autem $-124yy$ ad $-4yy$, invenio $-128yy$, quod rursus divido per

Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.

K 3 —16,

-16, & provenit $+8yy$, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipſum per yy, exſurgit $-8y^4$, addendum termino dividendo, qui etiam eſt $-8y^4$, quæ quidem ſimul conficiunt $-16y^4$, quod per -16 divido, & fit $+1y^4$ pro quotiente, & $-1y^6$ addendum ipſi $+1y^6$, id quod facit o, monſtratque diviſionem eſſe ad finem perductam. Quòd ſi verò quantitas aliqua ſuperfuiſſet, vel aliquis præcedentium terminorum abſque fractione dividi non potuiſſet, manifeſtum fuiſſet, diviſionem nullo modo fieri potuiſſe.

Similiter ſi habeatur $y^6 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -a^5 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{smallmatrix} \infty\ 0.$ ultimus terminus abſque fractione dividi poteſt per a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & ſimiles. Sed duas ſufficit ex illis conſiderare, nempe aa, & $aa+cc$; aliæ enim, cum in quotiente plures paucioreſve dimenſiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini

M reperiuntur, impedirent, ut diviſio fieri poſſet. Vbi notandum, me ipſius y^6 dimenſiones tantùm pro tribus dimenſionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota ſumma. Examinando igitur binomium $yy-aa-cc$, invenitur, diviſionem per illud fieri poſſe, hoc modo:

$$+y^6 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \\ \hline -aa-cc \end{smallmatrix} \infty\ 0,$$

$$\begin{array}{lll} -y^6 & -2aa & -a^4 \\ \hline & +cc & -aacc \\ \hline 0 & -aa-cc & -aa-cc \\ \hline \end{array}$$

$$+y^4 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} +a^4 \\ +aacc \end{smallmatrix} \infty\ 0.$$

Id quod monſtrat radicem quæſitam eſſe $aa+cc$. Quemadmodum facilè per multiplicationem probari poteſt.

At

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema quod ab ea dependet, esse Solidum. Nec minus vitium est, constructionem ejus postea per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad constructionem illorum, in quibus non nisi circulis est opus, sectiones Conicas adhibere: siquidem quicquid ignorantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur. N

Quænam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubicâ.

Porrò si habeatur Æquatio, in quâ incognita quantitas quatuor habeat dimensiones: eodem modo, sublatis primùm surdis & fractis numeris; (si qui sunt) videndum est, num inveniri possit binomium, compositum ex incognita quantitate + vel — quantitate aliqua, quæ absque fractione ultimum terminum dividit, quod dividat totam summam. Hoc enim si inveniatur; vel quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; vel saltem post divisionem hanc relinquentur tantùm in Æquatione tres dimensiones, ita ut illa deinde rursus eodem modo sit examinanda. Quòd si verò tale binomium non inveniatur, oportebit augendo aut diminuendo valorem radicis, secundum summæ terminum tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipsam ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Id quod hoc modo fit:

Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cùm Problema est Planum. Et quænam illa sint, quæ Solida sunt dicenda.

loco $+ x^4 * . pxx . qx . r \infty 0$,

scribendum est.

$$+ y^6 . 2py^4 \, {}^{+pp}_{.4r} \, yy - qq \infty 0.$$

Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam.

Et quod ad signa + & — attinet, quæ omisi, si habeatur $+p$ in Æquatione præcedente, in hac ponendum est $+2p$; aut si habeatur $-p$, ponendum est $-2p$. & contra, si habeatur ibi $+r$, ponendum hîc est $-4r$; aut si habeatur ibi $-r$, ponendum hîc est $+4r$. & sive illic

illic fuerit $+q$, five $-q$, femper tamen hîc ponendum eft $-qq$, & $+pp$. faltem fi x^4 & y^6 fignis $+$ notatæ fupponantur. quippe contrarium fieri deberet, fi fupponeretur ibi fignum $-$.

Exempli causâ, fi habeatur $+x^4 * -4xx -8x +35 \propto 0$, fcribendum ejus loco eft $y^6 -8y^4 -124yy -64 \propto 0$. Cum enim quantitas, quam nominavi p, fit -4, ponendum eft $-8y^4$ pro $2py^4$. & cum illa, quam vocavi r, fit 35, ponendum eft $\begin{matrix}+16\\-140\end{matrix}yy$, hoc eft, $-124yy$, loco $\begin{matrix}+pp\\-4r\end{matrix}yy$. Et denique cum q fit 8, ponendum eft -64, pro $-qq$.

Eodem modo pro $+x^4 * -17xx -20x -6 \propto 0$, fcribendum eft $+y^6 -34y^4 +313yy -400 \propto 0$. Nam 34 eft duplum ipfius 17, & 313 eft hujus quadratum junctum quadruplo ipfius 6, & 400 eft quadratum ipfius 20.

Similiter quoque loco

$$+z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{matrix}zz \begin{matrix}-a^3\\-acc\end{matrix}z \begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{matrix} \propto 0.$$

fcribendum eft

$$y^6 \begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4 \begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix} \propto 0.$$

quippe p eft $+\frac{1}{2}aa - cc$, & pp eft $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ eft $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$, ac tandem $-qq$ eft $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

Poftquam igitur Æquatio fic ad tres dimenfiones eft reducta, quærendus eft valor ipfius yy, methodo jam explicatâ. Quòd fi verò ita inveniri nequeat, non opùs erit ulteriùs progredi. Infallibiliter enim inde fequitur, Problema effe Solidum. Sin autem inveniatur, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarum utrâque incognita quantitas duas tantùm dimenfiones habeat, quarumque radices ab illius

lius radicibus non differant. Nimirum loco Æquationis

$$+x^4 * . pxx . qx . r \infty 0,$$

scribendæ sunt hæ duæ aliæ

$$+xx-yx+\tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \infty 0, \&$$

$$+xx+yx+\tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \infty 0.$$

Et quod attinet ad signa + & —, quæ omisi, si in Æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum erit in utraque harum duarum $+\frac{1}{2}p$; & $-\frac{1}{2}p$, si in priore habeatur $-p$. Ponendum verò est $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$; prout habetur $+q$ in prima. Et contra, si habetur ibi $-q$, ponendum est $-\frac{q}{2y}$ in illa, ubi habetur $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Vnde consequenter facile est omnes Æquationis propositæ radices cognoscere, atque hinc Problema, cujus solutionem continet, construere, adhibendo tantùm circulos, & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro $x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$ ponendo $y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$ invenitur yy esse 16: hinc loco Æquationis $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$ scribendæ sunt hæ duæ $+xx-4x-3 \infty 0$ & $+xx+4x+2 \infty 0$. Nam y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20; ita ut $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$ faciat -3, & $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ faciat $+2$. E quibus binis Æquationibus si extrahantur radices, invenientur eædem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur x^4. Nimirum una vera, quæ est $\sqrt{7}+2$, & tres falsæ, quæ sunt $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, & $2-\sqrt{2}$.

Similiter cùm habetur $x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$:

 quo-

quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ rurſus eſt 16, hinc ſcribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \& xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hîc enim $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ facit 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum Æquationum invenitur radix, ſive vera, ſive falſa, liquidò conſtat, quatuor radices Æquationis, ex qua deductæ ſunt, imaginarias eſſe, & Problema, cujus gratiâ Æquatio inventa eſt, naturâ ſuâ eſſe Planum; ſed nullâ ratione conſtrui poſſe, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cùm habetur

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{1}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0:$$

quia pro yy invenitur $aa + cc$, ſcribendum eſt

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \&$$

$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Nam y eſt $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ eſt $\frac{1}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ eſt

o $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Vnde cognoſcitur, valorem ipſius z eſſe $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, vel $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

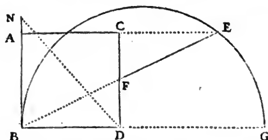
p Et quandoquidem ſupra feceramus $z + \frac{1}{2}a \infty x$, innoteſcit, quantitatem x, ad quam cognoſcendam omnes haſce operationes inſtituimus, eſſe

$$+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Verùm enimverò ut utilitas hujus regulæ meliùs cognoſci poſſit, operæ pretium eſt, ut illam Problemati alicui reſolvendo applicemus.

Exemplum oſtendens uſum hu-

Datis quadrato A D, & rectâ lineâ B N; oporteat producere latus A C uſque ad E, ita ut E F, ducta ab E verſùs



versùs B, sit æqualis ipsi N B. Docet Pappus, quòd, postquam primùm latus B D productum est usque in G, ita ut D G æquetur D N, circulusque descriptus est, cujus diameter B G, producendum deinde tantùm sit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim quærendo illam per methodum hîc propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse D G pro quantitate incognita, sed potiùs C F vel F D vel C E: cum hæ tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; sed ad Æquationem quæ non ita facilè absque regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo a pro B D vel C D, c pro E F, & x pro D F, fit C F ∞ $a - x$; Et ut C F seu $a-x$ est ad F E seu c, sic F D seu x est ad B F, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus est x, & alterum a, quadrata ipsorum, utpote $xx + aa$, æqualia sunt quadrato basis, quod est $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$. Vnde multiplicando totum per $xx - 2ax + aa$, invenietur Æquatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$, vel $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$.

rum reductionum.

 Vbi

V Vbi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus, quæ eſt longitudo lineæ D F, eſſe

$$\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}cc}-\sqrt{\tfrac{1}{2}cc-\tfrac{1}{2}aa+\tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Quòd ſi verò B F vel B E poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rurſus ad Æquationem, in qua quatuor dimenſiones eſſent, ſed quæ faciliùs reduci poſ-
R ſet; & ad quam etiam ſatis facilè perveniretur. Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.

Poſſem præterea hîc diverſas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adſcendunt, verùm ſuperfluæ forent: quandoquidem conſtructionem eorum Problematum, quæ Plana ſunt, ſemper per haſce invenire licet.

Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.

Poſſem quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdeſolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs aſſurgunt; ſed malo omnes ſub una comprehendere, dicendo in genere: quòd, poſtquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimenſionibus conſtant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimenſionum, producuntur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri poſſit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipſis ſuccedere compererit, aſſeverandum ſit, illas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Ita ut, ſi incognita quantitas 3 vel 4 dimenſiones habeat, Problema, in cujus gratiam Æquatio quæritur, Solidum exiſtat; & ſi 5 vel

vel 6 dimensiones habeat, uno gradu magis sit compositum. Et sic de cæteris.

Cæterùm omisi hîc demonstrationes plurimorum, quæ dixi: quoniam ita faciles mihi visæ sunt, ut, si modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ suâ sponte vobis sint occursuræ. quin etiam utiliùs erit ipsas hâc ratione, quàm si legantur, addiscere.

Iam verò postquam compertum est Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum adscendat; sive non altiùs quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem sit; aut etiam per ipsarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo nisi rectis lineis & circulis. Verùm suffecerit regulam generalem hîc adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo est simplicissima. S

Modus generalis construendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimensionum.

Primò igitur tollendus est secundus Æquationis propositæ terminus, modò jam non absfuerit, atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \infty * apz. aaq,$ si incognita quantitas tres tantùm dimensiones habeat; aut ad hanc: $z^4 \infty *. apzz. aaqz. a^3r,$ si quatuor obtineat dimensiones; Seu sumendo a pro unitate, ad hanc: $z^3 \infty *. pz. q;$ aut ad hanc $z^4 \infty *. pzz. qz. r.$ T

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, & axem ejus esse A C D K L, latusque rectum a seu 1, cujus A C sit dimidium, & denique punctum C esse intra hanc Parabolam, cujus vertex sit A: Oportet facere C D $\infty \frac{1}{2}p$, eamque sumere in linea A C, continuata versùs C, si in Æquatione habeatur $+p$; sed versùs alteram partem, si habeatur $-p$. Porrò è pun- V

cto D, aut ex puncto C, ſi non habeatur quantitas p, erigendo ad axem perpendicularem D E æqualem $\frac{1}{2}q$, oportet ex centro E circulum deſcribere F G, cujus ſemidiameter ſit A E, ſi Æquatio tantùm Cubica fuerit, hoc eſt, ſi non habeatur quantitas r. Aſt ſi habeatur r, & quidem ſigno + adfecta, oportet ulteriùs in hac linea A E, producta utrinque, ex una parte ſumere A R ∞ r, & ex altera parte A S æqualem lateri recto Para-

Parabolæ, quod eſt 1, deſcriptoque circulo cujus diameter RS, erigere AH perpendicularem ad AE, quæ occurrat huic circulo RHS in puncto H, quod illud ipſum eſt, per quod alter circulus FHG tranſire debet. Quòd ſi verò habeatur $-r$, oportet inſuper in alio circulo, cujus diameter eſt AE, inſcribere AI, æqualem inventæ AH: inventumque erit punctum I, per quod primus circulus quæſitus FIG tranſire debet.

Vbi ſciendum, quòd circulus hic FG ſecare vel tangere poſſit Parabolam in 1, 2, 3, aut 4 punctis, à quibus ſi ad axem demittantur perpendiculares, habebuntur omnes

omnes Æquationis radices, tam veræ, quàm falſæ. Nimirum ſi quantitas q ſit adfecta ſigno +, veræ radices erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Parabolæ parte, qua eſt E circuli centrum, reperientur, ut F L; & reliquæ, ut G K, erunt falſæ. Sed contra, ſi hæc quantitas q notata fuerit ſigno —, veræ erunt illæ, quæ ex altera ſunt parte; & falſæ, ſeu minores quàm nihil, quæ ex parte illa, ubi eſt centrum circuli E. Et denique ſi hic circulus non ſecat, nec tangit Parabolam in aliquo puncto, indicio eſt, Æquationem nullam admittere radicem ſive veram, ſive falſam, ſed tantùm
v v imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis exoptare queat, generaliſſima ſit & perfectiſſima.

Quorum quidem demonſtratio admodum facilis eſt.

Etenim

Etenim si linea GK, per constructionem hanc inventa, vocetur z, AK erit zz, propter Parabolam, in qua GK debet esse media proportionalis inter AK & latus rectum, quod est 1. Deinde, si ab AK auferam AC, quæ est $\frac{1}{2}$, ut & CD, quæ est $\frac{1}{2}p$, relinquetur DK seu EM $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, cujus quadratum est

$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et quia DE seu KM est $\frac{1}{2}q$, tota GM fit $z + \frac{1}{2}q$, cujus quadratum est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, additisque hisce duobus quadratis, habebitur $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$,

pro quadrato lineæ G E, quippe quæ basis est trianguli rectanguli E M G.

Sed quia hæc eadem linea G E est semidiameter circuli F G, poterit ipsa aliis adhuc terminis explicari. Nimirum si E D fuerit $\frac{1}{2}q$, & A D $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, E A erit $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$, propter angulum rectum A D E. Deinde cum A H sit media proportionalis inter A S, quæ est 1, & A R, quæ est r, erit ipsa $\sqrt{r}$. Ac denique, propter angulum rectum E A H, quadratum ex H E seu E G est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: adeò ut habeatur Æquatio inter hanc summam & præcedentem. Eadem quippe quæ $z^4 \infty * + pzz - qz + r$. Vnde consequenter liquet, inventam lineam G K, quæ nominata fuit z, Æquationis hujus esse radicem. Quod erat demonstrandum. Et si calculum hunc ad omnes alios hujus regulæ casus applicueritis, mutando signa + & —; prout opus exiget, eodem modo ad quæsitum pervenietis; ita ut illis diutiùs immorari non sit opùs.

Si

Si itaque juxta hanc regulam inter lineas a & q duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo z pro una, esse ut a ad z, sic z ad $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{z^3}{aa}$; ita ut habeatur Æquatio inter q & $\frac{z^3}{aa}$, utpote, $z^3 \infty * * aaq$. Deinde descriptâ Parabolâ F A G, unà cum segmento sui axis A C, quod est $\frac{1}{2}a$, semissis nempe lateris recti, erigenda est ex puncto C perpendicularis C E, æqualis $\frac{1}{2}q$, atque ex centro E per A describendus circulus A F, ut obtineantur F L & L A, duæ mediæ quæsitæ. *Inventio duarum mediarum proportionalium.*

Similiter si dividere velimus angulum N O P, sive arcum, portionemve circuli N Q T P in tres æquales partes; si sumatur N O ∞ 1 pro radio circuli, & N P ∞ q pro subtensa arcus dati, ac N Q ∞ z pro subtensa trientis hujus arcus, exsurget Æquatio $z^3 \infty * 3z - q$. Etenim ductis lineis N Q, O Q, & O T; si Q S parallela fiat ipsi T O, patet, quòd, sicut N O est ad N Q, sic N Q sit ad Q R, & Q R ad R S; adeò ut, cum N O sit 1, & N Q z, Q R futura sit zz, & R S z^3. Et quia tantùm R S seu z^3 impedit, quò minùs linea N P, quæ est q, tripla sit lineæ N Q, quæ est z, habebitur *Ratio dividendi angulum in tres partes æquales.*

$$q \infty 3z - z^3, \text{ vel } z^3 \infty * 3z - q$$

Deinde descriptâ Parabolâ F A G, in qua C A sit æqualis semissi lateris recti principalis, si sumatur C D ∞ $\frac{1}{2}$, & perpendicularis D E ∞ $\frac{1}{2}q$: secabit circulus F A g G, centro E per A descriptus, hanc Parabolam in tribus punctis F, g, & G, non numerato puncto A, quod est ejus vertex. Id quod indicat in hac Æquatione tres haberi radices, nimirum duas G K & $g\,k$, quæ veræ sunt, & tertiam, nempe F L, quæ est falsa; Atque ex hisce duabus veris minorem $g\,k$ illam esse, quam pro quæsita linea N Q sumere oportet. Altera enim G K, æqualis

 est

eſt ipſi N V, ſubtenſæ trientis arcus N V P, qui cum reliquo arcu N Q P totum circulum complet. Falſa autem F L æqualis eſt duabus hiſce Q N & N V ſimul ſumptis, quemadmodum ex calculo facile eſt videre.

Quod omnia Solida Problemata reduci poſſint ad baſce duas conſtructiones.

Superfluum foret ſi inſiſterem hîc aliis exemplis in medium afferendis, cum Problemata omnia, quæ non niſi Solida ſunt, eò reduci poſſint, ut hâc regulâ ad conſtructionem ipſorum non aliter indigeamus, quàm quatenus inſervit ad inveniendas duas medias proportionales, aut ad dividendum angulum in tres æquales partes. Quod cognoſcetis, conſiderando, ipſorum difficultates ſemper Æquationibus, quæ ultra Quadrato-quadratum non adſcendunt, comprehendi poſſe; Et omnes illas, quæ ad Quadrato-quadratum aſcendunt, reduci poſſe ad Quadratum, ope quarundam aliarum, quæ tantùm ad Cubum adſcendunt; Et tandem, harum ſecundum terminum tolli poſſe. Ita ut nulla earum ſit, quam ad aliquam ex hiſce tribus formis reducere non liceat.

$z^3 \infty$.

$z^3 \propto * - pz + q.$
$z^3 \propto * + pz + q.$
$z^3 \propto * + pz - q.$

Si autem habeatur $z^3 \propto * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferreo, tribuit, nos docet, radicem esse Y

$$z \propto \sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Quemadmodum etiam, si habeatur $z^3 \propto * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini majus sit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; similis fermè regula nos docet, radicem esse

$$z \propto \sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Vnde apparet, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad Æquationem unius ex hisce duabus formis reducuntur, construi semper possint, ut Conicas sectiones adhibere non sit opùs, nisi ad extrahendas radices Cubicas ex quibusdam quantitatibus datis, hoc est, ad inveniendas duas medias proportionales inter hasce quantitates & unitatem.

Deinde si habeatur $z^3 \propto * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini non sit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; supponendo Circulum NQPV, cujus semidiameter NO sit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, hoc est, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ p & unitatem; tum etiam supponendo lineam NP huic Circulo esse inscriptam, quæ sit $\frac{3q}{p}$, hoc est, quæ sit ad alteram quantitatem datam q, ut est unitas ad trientem ipsius p; dividendus tantùm est uterque arcus NQP, NVP in tres æquales partes; eritque NQ, subtensa trientis unius arcus, unà cum NV, subtensâ trientis alterius, æqualis radici quæsitæ.

M 3 Deni-

Denique si habeatur $z^3 \infty * + pz - q$, supponendo rursus Circulum N Q P V, cujus radius N O sit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in quo inscripta N P sit $\frac{3q}{p}$: erit N Q, subtendens trientem arcus N Q P, una ex radicibus quæsitis: & N V, subtendens trientem arcus N V P, radix altera. Saltem si Quadratum semissis ultimi termini non excedat Cubum è triente quantitatis cognitæ penultimi termini. Etenim si majus esset, non posset linea N P huic Circulo inscribi, quippe quæ diametro ejus major foret. Id quod ostenderet, duas veras radices hujus Æquationis non nisi imaginarias esse, nec ullam realem extare præter falsam, quæ juxta Cardani regulam foret

$$\sqrt{C.\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Modus exprimendi valorem radicum omnium

Cæterùm notandum est, modum hunc exprimendi valorem radicum per relationem, quam habent ad latera certorum Cuborum, quorum tantùm contentum cognoscitur, nequaquam magis intelligibilem, neque sim-

Æquationum Cubicarum: ac per consequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.

simpliciorem esse, quàm si exprimantur per relationem, quam habent ad subtensas certorum arcuum, seu Circuli portionum, quarum triplum est datum. Ita ut Cubicarum Æquationum radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hîc propositum exprimi possint.

Si enim, exempli caussâ, radicem cognoscere arbitremur hujus Æquationis $z^3 \infty * + pz + q$: quia ipsam compositam esse scimus ex duabus lineis; quarum una est latus Cubi, cujus contentum est summa, quæ conflatur ex $\frac{1}{2}q$, & ex latere Quadrati, cujus contentum est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum est differentia, quæ est inter $\frac{1}{2}q$, & latus Quadrati, cujus contentum est $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, (quod illud omne est, quod ex Cardani regula addiscimus); Dubitandum non est, quin æquè distinctè aut etiam distinctiùs radix hujus $z^3 \infty * + pz - q$ cognoscatur, si ea consideretur inscripta Circulo, cujus semidiameter sit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo pro subtensa arcus intelligatur, cujus tripli subtensa sit $\frac{3q}{p}$. Quin etiam hi termini prioribus illis multò minùs sunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, si peculiari aliquâ notâ ad exprimendas hasce subtensas, quemadmodum fit notâ $\sqrt{C.}$ ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Possunt quoque per regulas hîc supra explicatas deinceps exprimi radices Æquationum omnium, quæ ad Quadrato-quadratum ascendunt; ita ut nesciam, quid in hac materia desiderari ampliùs possit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur simplicioribus, nec ut per constructionem aliquam, quæ unà & generalior & simplicior sit, determinentur.

Verum

Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sunt sine aliis lineis, magis compositis.

Verum quidem est, me nondum dixisse, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri possit nec ne. At verò si consideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus Problematum reducatur, quod est, ut quæratur valor radicum alicujus Æquationis, satis judicabitur, non difficile esse ita enumerare vias omnes, quibus inveniri possunt: ut hoc sufficiat ad ostendendum, generalissimam & simplicissimam fuisse selectam. Et speciatim, quod spectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compositam quàm circularem construi non possint, vel inde evidens esse potest, quòd illa omnia ad duas constructiones reducantur; in quarum unâ duo simul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantùm dependeat à simplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod est ipsius centrum; inde fit, ut eo quoque non nisi ad unum solummodo punctum inter duas extremas determinandum uti possimus, utputa ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas Æquales partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ semper à duabus diversis rebus dependet, ad duo diversa puncta determinanda inservire potest.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida sunt composita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes divisionem, præsupponunt, ope alicujus Conicæ sectionis con-

strui

ſtrui poſſit. Quare nihil melius hîc à me fieri poſſe confido, quàm ſi regulam generalem tradam conſtruendi illa ope lineæ curvæ, quæ deſcribitur per interſectionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum ſupra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inſervire queat, ſimpliciorem in rerum natura inveniri. Atque etiam vidiſtis, quomodo hæc linea immediatè ſectiones Conicas ſequatur in quæſtione tantopere à Veteribus quæſitâ, cujus ſolutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

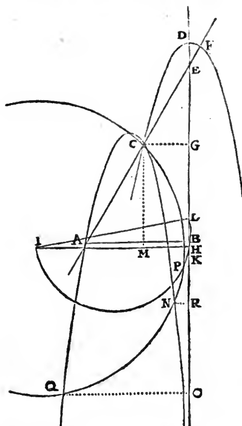
Modus generalis conſtruendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, ſex dimenſiones non excedentem.

Iam noſtis, cùm inveſtigantur quantitates, quæ ad conſtructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione ſemper ad Æquationem aliquam reduci poſſint, quæ non niſi ad Quadrato-cubum, aut Surdeſolidum adſcendat. Deinde etiam noſtis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri ſemper poſſit, ut radices hæ omnes veræ evadant, ac ſimul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini. Et denique, quo pacto, ſi tantùm ad Surdeſolidum adſcendat, ipſa ad Quadrato-cubum attolli poſſit, fierique ut nullus terminorum deſit.

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hîc occurrunt, per eandem regulam reſolvi queant, deſidèro ut hæc omnia fiant, & hâc ratione reducantur ſemper ad Æquationem hujus formæ

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

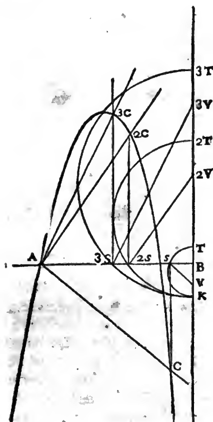
in qua quantitas vocata q, major ſit quadrato à ſemiſſe ejus, quæ nominatur p.



Poſt hæc ductâ lineâ rectâ BK, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari AB, cujus longitudo ſit $\frac{1}{2}p$; deſcribenda eſt in plano aliquo ſeparato Parabola, ut CDF, cujus latus rectum principale ſit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}}+q-\frac{1}{4}pp}$. quod brevitatis causâ vocabo n. Tum ponendo planum, in quo Parabola exiſtit, ſupra planum in quo ſunt lineæ AB & BK, ita ut axis ejus DE omnino congruat cum linea recta BK; ſum-

ſumptoque ſegmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, adplicanda eſt longa regula ad punctum E, ita ut, poſtquam ad punctum A plani inferioris quoque eſt adplicata, ſemper maneat adjuncta hiſce duobus punctis, interea dum Parabola ſecundùm lineam B K, ad quam ejus axis eſt adplicatus, vel elevatur vel deprimitur. quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ interſectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam A C N deſignabit, illam quippe quâ ad propoſiti Problematis conſtructionem indigebimus. Etenim eâ ſic deſcriptâ, ſi fiat B L æqualis D E, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, ita ut punctum L cadat in lineam B K, versùs partem, quam reſpicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B ſumatur L H æqualis $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, Et ex puncto H, ſic invento, ad partem curvæ A C N ducatur ad angulos rectos ipſi B K, linea H I, æqualis $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, quam abbreviandi causâ nominabo $\frac{m}{nn}$, Ac, poſtquam conjuncta ſunt puncta L & I, circulo L P I, cujus diameter I L, inſcribatur linea L P, æqualis $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$, Tandemque ex centro I per punctum P, ſic inventum, circulus deſcribatur P C N: ſecabit hic circulus vel tanget lineam curvam A C N, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hiſce punctis ad lineam B K deducentur, Æquationis hujus futuræ ſint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim ſi quantitas s adeò magna eſſet reſpectu aliarum, p, q, r, t, & v, ut linea L P major inveniretur diametro circuli I L, ſic ut eidem inſcribi non poſſet, nulla itidem foret radix in Æquatione propoſita, quæ

non esset imaginaria; nec etiam ulla foret radix, si circulus IP adeò parvus esset, ut curvam ACN in nullo prorsus puncto secaret. Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hìc sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantùm imaginarias.



Quòd si verò ratio hæc describendi lineam ACN per

per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile eſt plures alios modos in eundem finem excogitare. Vt, manentibus eiſdem quantitatibus pro A B & B L, nec non eâdem pro B K, quæ pro latere recto principali Parabolæ ſupponebatur; deſcribendus eſt tantùm ſemicirculus K S T, centro ejus ad libitum in linea B K aſſumpto, ita tamen ut lineam A B alicubi ſecet, ut in puncto S. Nam poſtquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K aſſumpta fuerit linea T V, æqualis B L, jungaturque S V, atque à puncto A junctæ S V parallela ducatur A C, quæ rectæ S C, ductæ per punctum S, ipſi B K parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ ſibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæſita curva tranſire debet. Eodem modo inveniri poſſunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonſtratio ſatis facilis eſt.

Si enim regula A E unà cum Parabola F D adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo conſtat eas ad punctum C in curva A C N mutuâ interſectione deſignandum eſſe adplicandas) & quidem C G vocetur y: erit G D $\frac{yy}{n}$, cum latus rectum, quod eſt n, ſit ad C G ſicut C G ad G D. Auferendo autem D E, quæ eſt $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$ à G D, relinquetur $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pro G E. Deinde quia A B eſt ad B E, ut C G ad G E: hinc cum A B ſit $\frac{1}{2}p$, B E erit $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Eâdem ratione ſi punctum curvæ C ſupponatur inventum eſſe per interſectionem linearum rectarum, S C, parallelæ ipſi B K, & A C, parallelæ ipſi S V; S B, quæ æquatur ipſi C G, eſt y: & cum B K æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi n, B T erit $\frac{yy}{n}$. eſt enim ut K B ad B , ita B S ad B T. Cumque T V eadem ſit

quæ B L, hoc est, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, B V erit $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Sicut autem S B est ad B V, sic AB est ad B E, quæ ideo est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$. ut ante. Vnde apparet, unam eandemque lineam esse, quæ utroque hoc modo describitur.

Porrò, quoniam B L & D E sibi invicem æquales sunt, æquales quoque inter se erunt D L & B E; ita ut, addendo L H, quæ est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, ad D L, quæ est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, habeatur tota DH, nempe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$, è qua auferendo G D, quæ est $\frac{yy}{n}$, relinquetur G H, videlicet $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Id quod ordine scribo, hoc pacto, G H $\propto$ $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$,

Et fit quadratum ex G H,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nnyy.}$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utputa versùs N, vel versùs Q, semper tamen invenietur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit super B H, intercipitur, iisdem hisce terminis iisdemque signis + & — exprimi posse.

Postea

Postea cum I H sit $\frac{m}{nn}$, & L H $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, I L erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$ (propter angulum rectum I H L) ; & cum L P sit $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, I P vel I C erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, (propter angulum rectum I P L). Dein ductâ C M perpendiculari ad I H, erit I M differentia, quæ est inter I H & H M vel C G, hoc est

est, inter $\frac{m}{nn}$ & y; ita ut quadratum ejus semper sit $\frac{mm}{n^4}$ $-\frac{2my}{nn}+yy$, quod à quadrato ex IC ablatum relinquit $\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}+\frac{2my}{nn}-yy$, pro quadrato ex CM, quod est æquale quadrato ex GH, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc summa quemadmodum altera divisa sit per $nnyy$, obtinebitur

$$\frac{-nny^4+2my^3-p\sqrt{v},yy-syy+\frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Cæterùm restituendo $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4+qy^4-\frac{1}{4}ppy^4$ pro nny^4, & ry^3 $+2\sqrt{v},y^3+\frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$ pro $2my^3$, & multiplicando utramque summam per $nnyy$: exsurget

$$y^6-py^5\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\+\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+2\sqrt{v}\\+\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\+\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy-ty+v,$$

æquale

$$\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\-q\\+\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+r\\+2\sqrt{v}\\+\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\-s\\+\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy.$$

Hoc est, habebitur

$$y^6-py^5+qy^4-ry^3+syy-ty+v \infty 0.$$

Vnde apparet, lineas CG, NR, QO, & similes esse hujus Æquationis radices. Quod erat demonstrandum.

Inventio quatuor mediarum proportionalium.

Hinc si invenire velimus 4^{or} medias proportionales inter lineas a & b; positâ x pro prima, prodibit Æquatio $x^5****-a^4b \infty 0$, vel $x^6*****-a^4bx* \infty 0$. Factâque $y-a \infty x$, invenietur

$$y^6-6ay^5+15aay^4-20a^3y^3+15a^4yy\left.\begin{matrix}-6a^5\\-a^4b\end{matrix}\right\}y\left.\begin{matrix}+a^6\\+a^5b\end{matrix}\right\}\infty 0$$

Vnde pro linea AB sumendum est $3a$, & $\sqrt{\frac{6a^3+aab}{\sqrt{aa+ab}}+6aa}$ pro BK, vel latere recto Parabo-

læ,

læ, quod ſupra nominavi n, & $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pro D E, vel B L. Porrò deſcriptâ lineâ curvâ A C N ſecundùm menſuram harum trium linearum, facienda eſt L H $\propto \frac{6a^3+aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & I H $\propto \frac{10a^3}{nn}+\frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab}+\frac{18a^4+3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & L P $\propto \sqrt{\frac{15a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$. Etenim circulus, qui centrum ſuum habet in puncto I, tranſiturus per punctum ſic inventum P, ſecabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus ſi ad rectam B K demittantur perpendiculares N R & C G, & minor N R à majore C G auferatur; erit reliqua x, prima ex quatuor mediis proportionalibus quæſitis.

Eodem modo facile eſt datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inſcribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verùm notandum eſt in plurimis horum exemplorum, quòd Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam ſecundi generis ſecare poſſit, ut interſectionis punctum cognitu ſit difficile, atque adeò hæc constructio ad Praxin non ſit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri poſſet, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed inſtitutum meum non eſt prolixum librum conſcribere, ſed potiùs multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me feciſſe, qui conſideraturi ſunt, quòd, reductis ad eandem conſtructionem Problematis omnibus ejuſdem generis, modum ſimul, quo ad infinitas alias diverſas reduci, atque ita omnia infinitis modis reſolvi poſſint, oſtenderim. Præterea etiam, quòd conſtructis iis omnibus, quæ Plana ſunt, interſectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida ſunt,

O inter-

interſectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis ſunt compoſita, interſectione ſimiliter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabola compoſitæ, eandem tantùm viam in conſtruendis reliquis omnibus, quæ magis magiſque in infinitum ſunt compoſita, ſequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progreſſionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non eſt difficile. Adeò ut ſperem à poſteris mihi gratias habitum iri, non ſolùm pro iis, quæ hîc explicui; ſed etiam pro iis, quæ conſultò omiſi, quò ipſis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

FINIS.



FLO-

FLORIMONDI DE BEAVNE
IN
GEOMETRIAM
RENATI DES CARTES
NOTÆ BREVES.



LGEBRA speciosa, hoc est, quæ exercetur per species rerum, quæ literis Alphabeti, aliisve similibus designantur, est Scientia, investigandis, inveniendisque Theorematis & Problematis inserviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportiones considerantur, concernens. Dicimus autem rationem inter se habere duas res, cùm homogeneæ seu ejusdem naturæ existentes, aut æquales sunt, aut inæquales, & minor per sui ipsius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque superans. Adeò ut hæc Scientia non solùm Algebram numerosam atque Veterum Analysin Geometricam comprehendat; sed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in sua de Methodo dissertatione.

Optimum verò est, ad stabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus assequendam, ut generaliter rationes hasce in lineis consideremus: cum simplicissimæ sint, & hoc sibi vendicent, quòd rationes omnes, quæ inter quascunque alias res considerari possunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommensurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quòd iis ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter se habentes, uti possimus. Etenim licèt linea nullam cum superficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) possumus tamen rationem, quæ inter duas superficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter se relatio-

nem aliquam habere statuimus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantùm cavendum est, ne permutata ratione utamur.

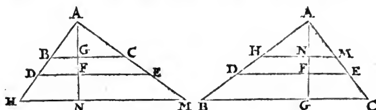
Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eædem sunt, quæ Arithmeticæ vulgaris, nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quòd illæ (sicut notavimus) circa incommensurabiles quantitates, non minùs quàm circa alias, versentur. Vt, cùm proponuntur duæ lineæ incommensurabiles, sive longitudine, sive longitudine & potentiâ, possunt ipsæ simul addi, una ab altera auferri, per se invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac si longitudine essent commensurabiles.

Neque verò docebimus, quo pacto hæ operationes per literas Alphabeticas, vel alias linearum aliarumve rerum species, quas designant, sint faciendæ: cum hoc ab aliis jam sit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis instituendæ sint, breviter exponit. Verùm observari volumus, quòd per hasce species, quas nominamus b, b^2, b^3, b^4, bd, b^2d, b^3d; primam videlicet b, numerum aut lineam simplicem; secundam b^2, quadratum ipsius b, seu b quadratum; tertiam b^3 seu b cubum; quartam b^4 seu b quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino simplices concipiantur; nisi quæstio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut, per hasce species alias res significemus, similem inter se relationem, quam lineæ ipsis designatæ, habentes. Attamen consentaneum est, nomina usitata retinere, quandoquidem lineæ, speciebus hisce designatæ, eandem inter se rationem, quam veræ superficies, & vera solida, quæ per ipsas denotantur, servant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter se relationem observant, quatenus sunt numeri simplices, qualem inter se obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræsentant.

Oportet itaque ostendere, spatia & corpora, speciebus hisce designata, eandem inter se rationem habere, quam lineæ simplices, quas per ipsas concipimus. Exempli gratiâ, b^2 eandem ratio-

rationem habere ad bd, & ad d^2, quatenus spatia significant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipsius b^3 ad b^2d & ad d^3, aliasque similes, eandem inter hæc Solida existere, quam ea, quæ est inter lineas, per has species designatas. Quod ipsum facile erit, si pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur a, sic ut hæ tres lineæ a, b, & b^2 proportionales existant, juxta id quod de multiplicatione in hac Geometria dictum est. Idem de lineis a, d, & d^2 est intelligendum. Sic etiam linea a est ad lineam b, sicut linea d est ad lineam bd; aut, ut linea a est ad lineam d, ita linea b est ad eandem lineam bd. Quod cum ita sit, linea b erit ad lineam b^2, sicut linea d ad lineam bd; cum eadem utrobique sit ratio, nimirum eadem, quæ lineæ a ad lineam b. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea b^2 ad lineam bd. Eodem modo linea b erit ad lineam bd, ut linea d ad lineam d^2; cum utraque ratio eadem sit, quæ lineæ a ad lineam d. quemadmodum est ostensum. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea bd ad lineam d^2. Patet itaque, b esse ad d, sicut b^2 ad bd; itemque b esse ad d, sicut bd ad d^2, & consequenter, rationem lineæ b^2 ad lineam d^2 esse duplicatam lineæ b ad lineam d; lineamque bd esse mediam proportionalem inter lineas b^2 & d^2. Id quod unusquisque novit ab Euclide esse ostensum, nimirum: rationem, quam habet b^2 ad d^2, quatenus designant superficies seu quadrata, duplicatam esse rationis, quam habet latus b ad latus d: itemque bd rectangulum esse medium proportionale inter hæc ipsa quadrata. ac per consequens, hæc spatia eandem inter se relationem habere, quam lineæ iisdem speciebus designatæ. Idem ostendi potest de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonstrationis. Vnde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas superficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonstrarunt, nos pro lineis, aliisve rebus, iisdem speciebus designatis, usurpare possimus, prout eandem quam dicta spatia seu corpora inter se relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum A D E, cujus angulus D A E sit rectus. Manifestum est ex elementis, quòd laterum quadrata simul sumpta quadrato basis



ſint æqualia: hoc eſt, ſi ponamus A D ∞ b, A E ∞ c, & D E ∞ d, quòd $b^2 + c^2$ æquetur d^2, quatenus deſignant vera quadrata. Quod quoque verum eſt, quatenus deſignant lineas, modò eandem inter ſe relationem obtineant, quam hæc ipſa quadrata; ut demonſtratum eſt à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Aſſumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim eſt) quàm D E, quæ quidem ſit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipſa autem eſto B C, parallela exiſtens ipſi D E, ducaturque perpendicularis A F, ipſam, ſi opùs eſt, producendo. Deinde fiat, ut B C ad D E, ita D E ad H M, fietque H M ∞ d^2.

Iam verò, ſicut hæ lineæ B C, D E, H M ſunt continuè proportionales, ita quoque lineæ B C, A E, N M, nec non lineæ B C, D A, H N. Compoſita enim eſt ratio B C ad A E, ex ratione B C ad A C, & ex ratione A C ad A E. Eſt autem ratio A E ad N M compoſita ex iiſdem rationibus, nimirum ex ratione A E ad F E, quæ eadem eſt rationi B C ad A C (propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum A E F & B C A,) & ex ratione F E ad N M, hoc eſt, A E ad A M, quæ eadem eſt rationi A C ad A E (per conſtructionem.) Id quod eodem modo patet de B C, A D, H N. Erit igitur N M ∞ c^2, & H N ∞ b^2, quæ quidem ſimul ſumptæ æquantur ipſi H M, hoc eſt, d^2. Quod erat demonſtrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo $\frac{b}{d}$, aliiſve ſimilibus, exprimere poſſimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. denotare valeamus; hoc ſanè compendio, quòd literis fractio exprimi poſſit, cujus numerator ad denomi-

nominatorem non habeat rationem commensurabilem; sed quæ similis sit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejusdem fractionis. Id quod non exiguæ est utilitatis, quemadmodum postea videbitur.

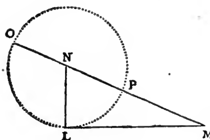
Iam autem explicandum est, cur æque-multæ dimensiones singulis Æquationis terminis sint tribuendæ. Quod sanè per se liquet, quando sub hisce terminis superficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas consistat, spatiaque illa aut corpora eodem semper linearum atque dimensionum numero designentur.

Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hosce terminos non nisi lineæ designantur, ut Methodus eò universalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præstare tenemur, cùm linea, quæ pro unitate sumenda est, indeterminata existit, seu, cùm requiritur, ut liberum sit assumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod facilè concipi potest, quoniam sumendo lineam aliquam, ut a, pro unitate, lineæ, verbi gratiâ, b^2 & d^2, denominationes hasce accipiunt, prout referuntur ad lineam a. At verò statuendo aliam quandam lineam pro unitate quàm a, licèt b & d eædem maneant, nihilominus tamen b^2 & d^2 à præcedentibus erunt diversæ. Ac proinde, si comparare velimus lineam b cum linea d^2: quoniam d^2 diversa est, prout ad diversas lineas refertur, quas pro unitate accipere possumus, ipsâ lineâ b eâdem semper manente; patet lineam b ad lineam d^2 non semper eandem rationem servare: sed contra, diversas ad illam sortiri relationes, pro diversis lineis, quæ pro unitate assumuntur. Et sic de aliis. Ast quæcunque tandem linea pro unitate sumatur, linea tamen indeterminata, & quæ per b^2 concipitur, eandem semper habet rationem ad d^2, quam quadratum lineæ b ad quadratum lineæ d. Atque ita de aliis omnibus, ùt supra est ostensum. Et quidem generalius est atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujusque arbitrium, ut deinde pro ipsa talis linea assumi possit, qualis videbitur, quàm eandem ab initio operationis determinare, sumendo pro ipsa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimùm conducat ad confusionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi possent. Verùm cùm unitas determinata existit, tum quidem non ampliùs singulis

Æqua-

Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur: cum unitas illas ubique supplere possit, ubi numero pauciores habentur, & ipsa has species multiplicans aut dividens easdem non mutet. Si verò ibidem non sit expressa, poterit tum quidem subintelligi. Qua de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICVM EXTRACTIONE.



QVandoquidem linea L M primæ figuræ tangit circulum L O P, rectangulum O M P æquatur quadrato ex L M. Sunt autem bina rectangula M O P & O M P æqualia quadrato ex O M. Æquale igitur erit rectangulum M O P, unà cum quadrato ex L M, quadrato ex O M; hoc est, erit $z^2 \infty az + b^2$, ac per consequens $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: cum O N æquetur $\frac{1}{2}a$, & quadratum ex N M tantundem valeat atque duo quadrata ex N L & L M, hoc est, $\frac{1}{4}a^2$ & b^2. Id quod primò erat demonstrandum.

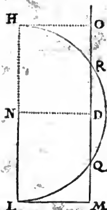
Deinde rectangulum O P M & quadratum ex P M æqualia simul sunt rectangulo O M P. Est autem rectangulum O M P æquale quadrato ex L M. Quadratum itaque ex P M æquale est quadrato ex L M, minus rectangulo O P M: hoc est, erit $y^2 \infty - ay + bb$, ac proinde $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. quia, cùm N M æquatur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ut supra, ac ex ipsa aufertur N P seu $\frac{1}{2}a$, relinquitur M P seu y.

IN SECVNDAM FIGVRAM DE RADICVM EXTRACTIONE. PAG. 7.

REducemus hanc figuram ad sequentem, in qua N D & H O sunt parallelæ & æquales ipsi L M. Quibus positis, quoniam

LM

LM tangit circulum HRQL in puncto L, erit quadratum ex LM æquale rectangulo RMQ. Deinde, quia MD æqualis est DO, & QD ipsi DR, erit & MQ æqualis RO. Vnde additâ communi QR, fiet quoque MR æqualis QO. Ac proinde si à rectangulo OMR auferatur rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex QO seu MR. Hinc cum RM sit ∞z, HL seu MO ∞a, & LM ∞b: erit $z^2 \infty az - bb$.



Similiter si à rectangulo OMQ auferatur rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex RO seu MQ. Ac proinde si QM sumatur pro z, habebitur $z^2 \infty az - bb$.

Jam autem cum linea RQ divisa sit bifariam in D, ac ipsi in directum adjecta QM, erit rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, unà cum quadrato ex DQ seu RD, æquale quadrato ex DM, hoc est, ex semisse ipsius a; ac proinde quadratum ex DQ seu DR æquale quadrato ex DM, minus quadrato ex LM, hoc est, æquale $\frac{1}{4}aa - bb$. Vnde si addamus $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, hoc est, DQ seu DR ad DM vel $\frac{1}{2}a$, habebimus MR pro z; si verò illam ex eadem DM auferamus, obtinebimus quoque QM pro z. E quibus patet, primo casu fieri MR, hoc est, $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, secundo autem MQ, hoc est, $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ita ut hæc æquatio $z^2 \infty az - bb$ duas habeat radices, nimirum, MR & MQ, quæ, sicut jam diximus, exprimuntur. Id quod secundò erat demonstrandum.

Possunt quoque hæc omnia, quæ de radicibus dicta sunt, per Algebram demonstrari. Si enim in primo exemplo, sicut fecimus, ponatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: auferendo utrinque $\frac{1}{2}a$, habebitur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \infty z - \frac{1}{2}a$. Ac proinde, si sumantur horum quadrata, erit & $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Et ablato

utrinque $\frac{1}{4}a^2$, atque transferendo $-az$ in alteram æquationis partem: $z^2 \infty az + b^2$.

In ſecundo exemplo, cùm y æquatur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ac proinde $y + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$, & per conſequens $y^2 \infty -ay + bb$.

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, idcoque $z - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, unde & $z^2 \infty az - bb$.

In ultimo exemplo, cum ſecundo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac idcirco $\frac{1}{2}a - z \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $\frac{1}{4}aa - az + z^2$, $\infty \frac{1}{4}aa - bb$, & propterea $z^2 \infty az - bb$. Quæ quidem demonſtrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORVM PLANORVM ET SOLIDORVM PAG. 26, & ſequent.

QVicquid in primo libro reſtat, nec non in ſecundo uſque ad Locorum Planorum & Solidorum compoſitionem reperitur, intellectu ſatis facile eſt; quare ad paginam 26 & ſequentes progrediemur. Vbi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licèt pro arbitrio ſumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri poſſit, ita ipſam ordinare oporteat: ut, ſi una, puta x, ad libitum ſumatur, altera, quæ eſt y, denominationi terminorum ejus inſerviat, ſic, ut y^2 unam conſtituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo y ſola ſine x reperitur, quem ſequatur y cum x, & poſtea x ſine y, & tandem terminus, in quo neque x neque y reperiatur. Atque impoſſibile quidem eſt alios caſus invenire, quando quantitates indeterminatæ y & x duas tantùm dimenſiones habent: quanquam ſæpiſſimè contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde obſervandum quoque eſt, ſi termini illi plures literas vel dimenſiones contineant, modò quantitates indeterminatæ y & x duas dimenſiones non excedant, facile eſſe, dividendo totam æqua-

æquationem per literas ipsi yy adhærentes, efficere, ut yy sola unam partem æquationis constituat & reliquæ alteram partem, ad instar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum yy jungebantur. Vbi nemo existimare debet, fractionem pluribus dimensionibus constare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, postquam ex ipso numerus literarum denominatoris est subductus, quemadmodum in exemplo, eâdem hujus Geometriæ paginâ proposito, apparet.

Quod verò de dimensionibus jam diximus, eodem sensu intelligendum est, quo antea advertimus, utile esse, ut singulis æquationis terminis æquè multæ tribuantur literæ. Nam sicut b^2 significare potest lineam aliquam, sic etiam $\frac{b}{d}$, & $\frac{b}{d^2}$; quæ tamen sic usurpari non debent, nisi cùm linea quædam pro unitate est determinata: ob rationem supra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem ostendimus, quæ sequitur, cùm singulis æquationis terminis æquè multæ literæ vel dimensiones tribuuntur, etiamsi illis nil nisi lineæ aliævè res similes designentur.

Porrò notandum est, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodemve loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem sortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur y^2; & pro alio, in quibus reperitur y; & rursus pro alio omnes, in quibus y non reperitur. Atque ita ulteriùs, si radix plures dimensiones habuerit. Est autem hoc (ut diximus) generale; speciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo y reperitur, duos casus faciamus; in quorum uno y reperiatur sine x; & in altero, ubi cum x sit conjuncta: cum y & x duæ indeterminatæ quantitates sint & utravis æquationis radix esse possit. Neque difficile est ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis existentibus, facile est, tales assumere, quæ supponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod designatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi y reperitur sine x, solummodo ponatur $2my$, quippe quod supponitur æquale omnibus simul terminis ejusdem denominationis. Loco autem eorum

 omnium,

omnium, ubi y & x ſimul reperiuntur, (ſiquidem hæc Geometriæ Methodus poſtulat, ut x retineatur, ac nihilominùs terminus quilibet plures quàm duas dimenſiones habere non debeat,) ponitur tantùm $\frac{2n}{z}xy$, ut ſic deſignentur fractiones omnes, quæ ſimilem habent radicis denominationem. Quòd verò loco my & $\frac{n}{z}xy$ ſumatur $2my$ & $\frac{2n}{z}xy$, id tantùm in eum finem fit, ut faciliùs ad æquationis radicem perveniatur: ad quam obtinendam requiritur, ut literarum m & n ſemiſſes accipiantur. Sicut ſuperiùs vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas ſolùm dimenſiones habet, ſumus loquuti.

Poſtquam igitur termini, in quibus y abſque x, atque etiam in quibus y & x ſimul reperiuntur, hoc modo ad ſimpliciores reducti ſunt, extrahitur radix ex Æquatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix eſt

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}},$$

Deinde ſumenda eſt m^2 pro omnibus terminis in vinculo, in quibus x non reperitur, cujus quantitas m eadem eſt in æquatione propoſita cum ea, quæ eſt extra vinculum; ſed aliàs poteſt eſſe diverſa, quo caſu loco m extra vinculum præſtat quodammodo aliam literam aſſumere. Poſt quæ præter terminos, in quibus x abſque y reperitur, nihil reducendum reſtat. Poſſunt autem hi duobus modis ſe habere: prout nimirum habebitur vel x^2, vel x ſimpliciter. Vnde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus x ſimpliciter reperitur, ſcribendum ſit $o\,x$. Quo loco notandum quoque venit, literam o quantitatem aliquam hîc deſignare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis eſt ac loco illorum omnium ſcribitur, quæ cum x junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram ſeu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hîc, ad confuſionem evitandam, præſtare videatur, pro o aliam quandam literam ſubſtituere. Sed hæc monuiſſe ſufficiat. Denique reducendæ ſunt etiam literæ, quæ cum x^2 junguntur, quæque nil præter fractionem deſignare poſſunt: cum x^2 duas habeat dimenſiones, hoc videlicet modo: $\frac{p}{m}x^2$. Vbi conſiderare oportet, quòd litera m fractionis $\frac{p}{m}$ eadem quan-

quantitas existat, quæ in m^2 in vinculo. Quâ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantùm dimensiones ascendit, quæ, prout ex illa educta est, non reducatur ad hanc formulam: $y \infty m - \frac{n}{z} x + \sqrt{m^2 + o x - \frac{p}{m} x^2}$. Ita ut hæc ipsa quibuslibet Locis Planis & Solidis construendis inservire queat: cum omnes locos sive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri possunt, comprehendat; adeoque non nisi signorum + & — variationem, atque loca & terminos, qui in propositis æquationibus deprehendi nequeunt, considerare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes sunt animadversa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre possent, illustrare conabimur.

OBSERVATIO PRIMA.

POstquam æquatio ad supradictam formulam est reducta, & illa, sive æquè multos, sive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis est affecta: ut exempli gratiâ, si loco $\frac{n}{z} x$ habeatur $\frac{3}{4} x$, potest operatio institui per hasce fractiones, supponendo, numeratorem 3 esse æqualem numeratori n, & denominatorem 4 æqualem denominatori z. Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales sunt, & ad literas superioris formulæ referuntur. Vnde cùm habetur fractio denotata hoc pacto $x \sqrt{\frac{3}{4}}$ loco $\frac{n}{z} x$; erit litera n æqualis $\sqrt{3}$, & z æqualis $\sqrt{4}$, atque ita de aliis. Est autem bene observandum, quod diximus: nimirum, si in æquatione reperiatur m^2, denominatorem m fractionis $\frac{p}{m} x^2$ tum esse æqualem ipsi m quantitatis m^2. id quod facile est, etiamsi alia fractio haberetur, modò supponamus, m esse ad p, sicut denominator hujus fractionis ad suum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd si autem id per numeros fieri non possit, operandum erit per literas, quod sæpe est commodissimum. Porrò observandum est, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & transverso inserviunt, non aliæ literæ usurpandæ sint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem

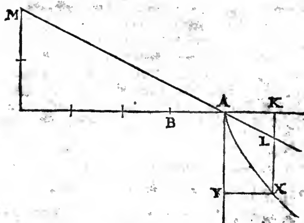
terminorum non magis sint considerandæ, quàm si non haberentur. Cujus ratio est, quòd D. des Cartes, ut universaliter hæc tractaret, terminos hosce ejusmodi constitutionis effecerit, in qua loca omnia forent repleta. Adeoque literæ locorum, quæ in proposita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ sunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & transversis exprimendis inserviunt.

OBSERVATIO SECVNDA.

PAg. 27. casus, cùm in æquatione non habetur m, difficultatem afferre posset, quare ad illum intelligendum cogitandum est, quòd, quando in æquatione non habetur m, ducenda itidem non sit linea I K in figura ejusdem paginæ. Ac proinde, ut inveniatur L I, postquam habetur $\frac{n}{z}x$, non referenda est illa ad I K sed ad A B, eodem modo, quo D. des Cartes ipsam comparat ipsi I K. Quandoquidem facere oportet, ut A B sit ad B L, sicut z ad n, hoc est, ut A B existente x, B L sit $\frac{n}{z}x$, atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, si habeatur $-\frac{n}{z}x$; at ex altera parte versùs R, si reperiatur $+\frac{n}{z}x$. Quo facto, ducenda est linea A L, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ L I, hoc est, eodem munere fungetur, quo L I in exemplo D^ni^ des Cartes. Et quidem cognita erit linea A L, cum lineæ A B, B L, angulusque A B L cognoscantur. Atque ita pro A L accipere possumus $\frac{a}{z}x$; eritque a nota.

Sed rem fortassis planiùs per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in exposita figura, recta linea A Y, curva autem A X, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam A Y normaliter ducatur X Y, sumptâque utcunque rectâ A B, hæc ipsa unà cum linea A Y sit ad lineam A Y, sicut linea A Y ad lineam X Y.

Esto A B ∞ b, A Y ∞ y, & A K æqualis ac parallela ipsi X Y ∞ x. Hinc cum $b+y$ sit ad y, sicut y ad x, erit $yy \infty xy + xb$, & $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xb}$. Vnde ex iis, quæ habentur pag. 29. constat, lineam hanc esse Hyperbolam, eò quòd habetur $+\frac{1}{4}x^2$. Ad quam construendam, cum A K sit x, linea K L erit $\frac{1}{2}x$, quan-

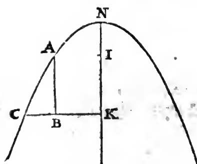


quandoquidem hæc fractio æqualis est ac ipsi $\frac{a}{z}x$ respondet. Porrò, quoniam rectus est angulus AKL, erit quadratum ex AL æquale quadratis ex AK & KL simul sumptis. Hinc cum quadratum ex AK sit x^2, & quadratum ex KL $\frac{1}{4}x^2$, AL erit $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ seu $x\sqrt{\frac{5}{4}}$; id quod æquale supponimus ipsi $\frac{a}{z}x$, at $\frac{1}{4}x^2$ ipsi $\frac{p}{m}x^2$: ita ut $\sqrt{5}$ sit a, & $\sqrt{4}$ sit z, & 1 sit p, & 4 sit m. Quibus positis, terminus $\frac{aom}{2pz}$, qui inveniendo centro inservit, erit $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, cùm am hoc est, $4\sqrt{5}$, valeat $\sqrt{80}$; & $2pz$, hoc est, $2\sqrt{4p}$, valeat $\sqrt{16}$; & o sit æqualis ipsi b; & $b\sqrt{\frac{80}{16}}$ valeat $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, hoc est, $\sqrt{5bb}$. Quod quidem centrum sumendum est à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola est, & habetur $+bx$, hoc est, $+ox$, juxta pag. 30. Latus rectum hîc est $\frac{oz}{a}$, hoc est, $b\sqrt{\frac{4}{5}}$ seu $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Vnde latus transversum fit $\frac{aom}{pz}$: quoniam oportet, ut pz^2 sit ad a^2m, sicut $\frac{oz}{a}$ ad latus transversum, quod idcirco, (ut diximus,) erit $\frac{aom}{pz}$. id quod facit $b\sqrt{\frac{80}{4}}$, hoc est, $\sqrt{20bb}$. Ac proinde

proinde cum distantia puncti A à centro sit $\sqrt{5bb}$, quæ semissis est lateris transversi (quoniam, cùm duorum quadratorum unum alterius est quadruplum, latus tantùm lateris fit duplum); manifestum est, punctum A verticem fore diametri A L. Ideoque si fiat M A ∞ $\sqrt{20bb}$, erit ipsa latus transversum, & latus rectum erit, (ut diximus,) $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Quorum demonstratio facilis est. Nam per prop. 21. lib. 1[mi] Conicorum Apollonii, ut latus transversum M A ∞ $\sqrt{20bb}$ est ad latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, ita est rectangulum M L A ad quadratum ex L X. Est autem A L ∞ $\sqrt{\frac{1}{4}x^2}$. Hinc si multiplicetur $\sqrt{20bb} + \sqrt{\frac{4}{5}x^2}$ per $\sqrt{\frac{4}{5}x^2}$, habebitur rectangulum M L A, quod proinde erit $\sqrt{\frac{100}{4}bbx^2} + \sqrt{\frac{25}{16}x^4}$. Multiplicando verò id ipsum per latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, exsurgit $\sqrt{\frac{400}{20}b^4x^2} + \sqrt{\frac{100}{80}bbx^4}$, quod divisum per latus transversum $\sqrt{20bb}$, exhibet $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}x^4}$, hoc est, $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}x^4}$, seu $bx + \frac{1}{4}x^2$, pro quadrato ex L X, unde ipsa L X fit $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$. Jam si ad lineam L X addatur linea L K ∞ $\frac{1}{2}x$, obtinebitur linea X K, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$, ac per consequens $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \infty y - \frac{1}{2}x$. Vnde ductâ utrâque æqualitatis parte in se, fiet $bx + \frac{1}{4}x^2 \infty yy - xy + \frac{1}{4}x^2$, seu $yy \infty bx + xy$. Hinc ut $b + y$ se habet ad y, ita y se habebit ad x. Quod erat demonstrandum.

Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum casum in quo non reperiatur $\frac{n}{z}x$ in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc $yy \infty -2dy + bx$, cujus radix est $y \infty -d + \sqrt{d^2 + bx}$, quam construere oporteat. Supponatur in figura sequente A B ∞ x, & angulus A B C ad libitum, B C autem, indefinitè continuata versùs B, ∞ y; fiatque B K ∞ d, quæ hîc idem præstat quod m in superiori formula, quoniam habetur $-d$. Ductâ autem N K indefinitè parallelâ ipsi A B, sumatur K I æqualis A B, prout ostensum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantùm $\sqrt{d^2 + bx}$, & pagina sequens docet lineam quæsitam esse Parabolam, quoniam non habetur x^2. Præterea puncto N existente vertice, linea I N esse debet $\frac{am^2}{oz}$ hoc est, $\frac{d^2}{b}$, in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit $\frac{oz}{a}$;

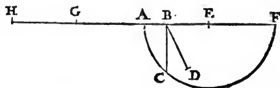
idem



idem hîc existens quod b, & sit K C ordinatim adplicata ad diametrum. Quorum demonstratio nec difficilis. Nam, secundùm 11 prop. 1^mi Libri Conicorum Apollonii, rectangulum comprehensum sub latere recto b & linea N K $\infty \frac{dd}{b} + x$, utpote; $dd + bx$, est æquale quadrato lineæ K C. Est verò linea K C æqualis ipsis B C $\infty\, y$, & B K $\infty\, d$, simul sumptis. Erit itaque linea K C $\infty\, y + d$, & quadratum ejus $\infty\, yy + 2dy + dd$. Ac proinde $yy + 2dy + dd \infty dd + bx$, & per consequens $yy \infty - 2dy + bx$. Quod demonstrare oportebat.

OBSERVATIO TERTIA.

Paginâ 29, circa medium, dictum est, lineam quæsitam esse Circulum, cùm $aam \infty pz^2$, & cùm angulus est rectus. Verùm hoc intelligendum etiam est, cùm angulus est rectus, nec omnino habetur aam, nec pz^2: aut cùm in æquatione literæ unius termini æquales sunt literis termini alterius. Ad pleniorem autem horum intellectum sequentia construamus exempla.



Habeatur æquatio $yy \infty bx - x^2$, cujus radix est $y \infty \sqrt{bx - x^2}$, & supponatur in apposita figura linea H A $\infty\, b$, linea A B $\infty\, x$, & linea

linea B C vel B D ∞ y. Manifestum autem est, lineam construendam esse Ellipsin aut Circulum, quoniam habetur $-x^2$. Non reperitur autem m, aut $\frac{n}{z}x$. Et sufficit pro x sumere A B, atque centrum ab A versùs B, cùm habeatur $+ox$, hoc est, in hoc exemplo, $+bx$. Ita ut pro illo sumendum sit $\frac{aom}{2pz}$, hoc est, b divisum per 2, seu $\frac{1}{2}b$, cum non habeatur a, neque m, neque p, neque z. Latus autem rectum sit $\frac{oz}{a}$, hoc est, b; transversum verò $\frac{aom}{pz}$, hoc est, b; & tum considerare tantùm oportet, utrum angulus A B C an verò A B D sit rectus. Nam cum hîc non habeatur aam, nec pz^2, existente angulo (puta A B C) recto, linea quæsita erit Circulus; at verò obliquo existente (ut A B D) erit linea quæsita Ellipsis. Quapropter si utroque casu faciamus A E ∞ $\frac{1}{2}b$, erit punctum E centrum, & A F ∞ b latus transversum; latus autem rectum ∞ b, atque B C vel B D ∞ y ordinatim adplicata ad diametrum A F. Quorum demonstratio facilis est. Etenim quoniam utroque casu juxta 21^{mam} prop^{nem} 1^{mi} libri Conicorum Apollonii latus transversum b est ad latus rectum b, sicut rectangulum F B A ad quadratum ex B C vel B D: erit rectangulum F B A æquale quadrato ex B C vel B D. Hinc cum F B sit ∞ $b-x$, & A B ∞ x, erit dictum rectangulum, hoc est, $bx-x^2$, æquale quadrato ex B C vel B D, hoc est, erit $yy \infty bx-x^2$. Quod erat demonstrandum.

Quòd si æquatio haberetur $yy \infty bb+x^2$, quæsita linea esset Hyperbole: & si vel B C, vel B D sumatur pro y, hoc est, sive angulus sit rectus, sive obliquus; erit constructio præcedenti omnino similis; nisi quòd centrum & latus transversum sit sumendum à puncto A versùs alteram partem, nempe versùs H. Atque ita faciendo A G ∞ $\frac{1}{2}b$, fiet punctum G centrum, eritque tam latus transversum, quàm rectum ∞ b. Demonstratio præcedenti erit similis, observatis tantùm signis $+$ & $-$.

OBSERVATIO QVARTA.

Animadvertendum præterea est, si in æquatione non habeatur fractio ipsi x^2 adhærens, & nihilominus tamen adsit m^2, hoc est, habeatur, verbi gratiâ, $\sqrt{m^2+ox-x^2}$ loco $\frac{p}{m}x^2$; quòd

quòd tum quidem fractio, (ut ſupra notavimus) ſi alia quàm $\frac{p}{m}$ fuerit, tranſmutanda ſit in fractionem ubi habeatur $\frac{p}{m}$. ſupponendo ſcilicet m eſſe ad p, ſicut denominator alterius fractionis ad ejuſdem numeratorem: quoniam in hac Methodo requiritur, ut m ipſius m^2 ſit denominator fractionis ipſi x^2 adhærentis. Vbi quidem, in caſu, quo haberi ponimus m^2, non autem fractionem, quæ ipſi x^2 adhæreat, ſupponere oportet $p \propto m$, ita ut habeamus $\frac{p}{m}x^2$ non aliûs valoris quàm x^2. Quod cognoſcendis centris, lateribuſque rectis atque tranſverſis inſervire poterit.

Ad pleniorem verò intellectum, detur in ſequente figurâ linea AB, & puncta in ea A & B; oporteatque invenire punctum, ut D, à quo ſi ducantur lineæ AD, DB, ut ipſæ datam inter ſe obtineant rationem, hoc eſt, ut AD ſit ad DB, ſicut linea PH ad lineam MN; quarum quidem PH ſit major quàm MN.

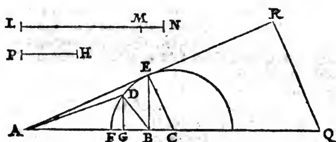
Demittatur à puncto D ſuper AB perpendicularis DG, & ſupponatur $AB \propto b$, $AG \propto x$, $GD \propto y$, $MN \propto f$. Quoniam igitur rectus eſt angulus AGD, erit quadratum ex AD æquale quadratis ex AG, GD, ſimul ſumptis, hoc eſt, $\propto x^2 + yy$. Eodem modo, cum GB ſit $b - x$, erit quadratum ex DB æquale quadratis ex BG, GD, hoc eſt, $\propto yy + bb - 2bx + x^2$. Iam verò, cum AD ſit ad DB, ſicut PH ad MN, erit quoque quadratum ex AD ad quadratum ex DB, ſicut quadratum ex PH ad quadratum ex MN. Porrò fiat, ut PH ad MN, ſic LN ad PH,

eritque L N ad M N, ut quadratum à P H ad quadratum ab M N. Hinc si L N vocetur c; erit c ad f, sicut quadratum à P H ad quadratum ab M N, hoc est, ut quadratum ex A D $\infty\ x^2 + yy$ ad quadratum ex D B $\infty\ yy + bb - 2bx + x^2$. Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc est, $fx^2 + fyy \infty\ cyy + cbb - 2cbx + cx^2$, & per consequens, $cyy - fyy \infty - cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2$, ac denuo $yy \infty \frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}$, & tandem $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}}$.

Ad abbreviandum autem hunc terminum $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f}$; licèt consideremus, quòd $f-c$ & $c-f$ exprimant semper unam eandemque differentiam, quippe quæ est inter c & f, etiamsi c major sit quàm f (dum in operatione supponimus $h \infty\ c-f$); semper tamen habebimus $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f} \infty \frac{-hx^2}{h}$, hoc est x^2 simpliciter; adeò ut relinquatur $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx}{c-f} - x^2}$. Id quod nos docet, locum esse Planum, cumque Circulum existere: cum habeatur $-x^2$, angulusque A G D sit rectus, & $aam \infty\ pz^2$; neque enim hîc habetur a, neque z; atque m ipsi p æqualis supponitur; cum nulla ipsi x^2 fractio adhæreat. Quibus ita constitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, est $\frac{aom}{2pz}$, ex quo nobis præter $\frac{o}{2}$ nihil inservit: cum m ipsi p sit æqualis; hoc est, pro eo tantùm habebimus $\frac{cb}{c-f}$. Ac idcirco, postquam linea L M æquatur $c-f$, si fiat ut linea L M $\infty\ c-f$ ad lineam L N $\infty\ c$, ita linea A B $\infty\ b$ ad lineam A C, erit linea A C $\infty \frac{cb}{c-f}$, & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A versùs B, quoniam habetur $+\frac{2cbx}{c-f}$, respondens ipsi $o.x$. Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & transversum sibi invicem sunt æqualia, alterutro tantùm erit opus. Formula autem lateris recti hîc est $\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$. Vnde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inservit, non aliud erit quàm $\sqrt{oo - 4m^2}$, hoc est, quòd,

quòd, auferendo quadratum $\frac{4cb^2}{c-f}$ à quadrato ex $\frac{2cb}{c-f}$, relinquatur quadratum lateris recti. Est autem paulò ante inventa linea



A C $\infty \frac{cb}{c-f}$; ideoque ejus dupla A Q $\infty \frac{2cb}{c-f}$. Hinc invenire adhuc oportet $\frac{4cb^2}{c-f}$, quod repræsentatur per $4m^2$. Invenitur autem; ponendo esse, ut $c-f$ ad c, ita bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. at ut $c-f$ est ad c, sic A B ∞ b est ad A C. Quapropter erit ut b ad lineam A C, sic bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. Quoniam autem ratio duorum quadratorum ad invicem duplicata est rationis, quam inter se habent ipsorum latera: hinc, si ponamus lineam A E mediam proportionalem inter b & lineam A C; erit b ad lineam A E, sicut b ad $\sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. & per consequens linea A E $\infty \sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. Vnde si A R fiat dupla ipsius A E, erit ea æqualis $\sqrt{\frac{4cb^2}{c-f}}$. Adeoque si constituamus triangulum A R Q, cujus latus A Q sit æquale $\frac{2cb}{c-f}$ (ut dictum est), cujusque angulus A R Q sit rectus; erit latus R Q $\infty \sqrt{o^2-4m^2}$ quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ $\frac{2cb}{c-f}$, minus quadrato $\frac{4cb^2}{c-f}$. Atque ita R Q fit & latus rectum & diameter Circuli. Et si ex centro C ducatur linea C E parallela ipsi

RQ, erit ipsa æqualis radio Circuli, utpote æqualis semissi lineæ RQ.

Et hæc quidem quantum ad constructionem juxta hanc Methodum, quæ, postquam jam est inventa, brevior reddi potest. Nam cum angulus AEC sit rectus, & AE media proportionalis inter AC & AB, similia erunt triangula AEC, ABE, & EBC; ac proinde AC ad CE, ut CE ad CB. Vt autem AB est ad AC, ita est LM ad LN. Quare per conversionem rationis erit AC ad BC, ut LN ad NM. At verò ut ratio AC ad CB duplicata est rationis AC ad CE (propterea quòd CE media est proportionalis inter AC & CB), ita etiam, cum linea PH media sit proportionalis inter LN & NM (per constructionem): erit ratio LN ad NM, hoc est, AC ad CB, duplicata rationis LN ad PH. Quapropter erit ut LN ad PH, seu PH ad MN, ita AC ad CE; quæ quidem Circuli radius est. Demonstratio hujus constructionis ad imitationem præcedentium inveniri potest, quam hîc omittimus: cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica sit ostensa.

OBSERVATIO QVINTA.

PAg. 21 hujus Geometriæ dictum est: quòd, postquam hæc æquatio non ascendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva semper sit primi & simplicissimi generis, sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ. Quod ita intelligendum est, duas quantitates indeterminatas x & y, cùm separatim in Æquationis terminis reperiuntur, non ultra sua quadrata ascendere debere; sed in terminis, ubi simul reperiuntur, singulas non nisi unam dimensionem habere debere, ita ut simul tantùm rectangulum aliquod duasve dimensiones efficiant.

Similiter, si in Æquatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur y^3, vel x^3; aut y^4, vel x^4; aut denique xy^2, vel $x^2 y$, vel $x^2 yy$: linea curva esset secundi generis. Et sic de cæteris. In quibus omnibus solùm indeterminatarum quantitatum ratio habenda est, non autem quantitatum cognitarum, quibuscum junguntur.

Quòd

Quòd si quantitates indeterminatæ singulæ separatim ad duas dimensiones non ascendant, neque etiam simul, hoc est, si nullus terminorum ad yy, aut ad xy assurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cùm locus est ad rectam lineam, Geometria hæc non minùs ipsum componere docet, quàm cùm locus est ad curvam lineam, quæ sit primi generis, & cùm in æquatione habetur yy: sicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi quæstione, ex qua superior formula deducta fuit, cernere licet. Quòd si verò habeatur x^2 in æquatione, non autem yy, immutanda tantùm erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur y, quæ dicta fuit x, & x, quæ dicta fuit y: in hunc modum. Esto in sequenti figura A B ∞ x, & B C ∞ y, atque æquatio inventa $x^2 \infty by$, quam ad dictam formulam reducere oportet.

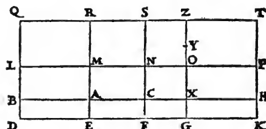


Ducta igitur A D parallelâ ipsi B C, & D C parallelâ ipsi A B, mutatisque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando A D, cui æqualis est B C, x, & D C, quæ æqualis est A B, y; quæsita æquatio erit $yy \infty bx$. cujus radix est $y \infty \sqrt{bx}$. Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum C fore in Parabola.

At verò si in æquatione non habeatur x^2, nec yy, sed xy; qui quidem casus, quoniam nec in æquatione quæstionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam afferre posset, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad summum plures quàm quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi x reperitur sine y; alterum, ubi y reperitur sine x; tertium, ubi reperitur xy; ac quartum denique, ubi neque x neque y reperitur. Adeò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationum ac constructionum, quæ sequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quonam pacto locus semper ad Hyperbolam existat, lineæque indeterminatæ sint Asymptoti, aut ipsis parallelæ.

Detur enim positione linea B H, punctum autem in ea datum sit A: deinde assumptâ lineâ A X pro x, ductâque lineâ X Y, quam pro y sumemus, facientem cum A X talem angulum, qualem



lem libuerit, eâque indefinitè productâ: ducantur lineæ D K, L P, Q T parallelæ ipsi B H; ita ut D K cadat infra B H; L P autem supra B H, inter puncta X & Y; Q T verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ Q D, R A E, S F, T K parallelæ ipsi X Y seu Z G; ita ut linea Q D transeat per lineam X A, productam versùs A; & S F per eandem inter puncta A & X; nec non linea T K per eandem A X, productam versùs X. Quibus ita constitutis, si per 4^{tam} Prop^{nem} 2^{di} libri Conicorum Apollonii describatur Hyperbola, quæ transeat per punctum Y, cujusque Asymptoti sint lineæ, quas refert quælibet constructio; manifestum est, per 12 Prop^{nem} ejusdem libri rectangula omnia, quæ ad easdem lineas similiter sumuntur, sibi invicem esse æqualia. Ideoque demonstrandum solùm restat, Asymptotos, atque rectangulum uniuscujusque æquationis, ritè esse constructa.

Esto igitur secundùm ultimam æquationem Hyperbola constructa, transiens per punctum Y, cujusque Asymptoti sint D Q, & D G; & rectangulum, contentum sub lineis D G, G Y, sit æquale rectangulo dato $df + bc$. Hinc si juxta constructionem fecerimus lineas A X ∞ x, X Y ∞ y, A B ∞ c, B D vel X G ∞ b: manifestum est, B X vel D G fore $x + c$; G Y autem $y + b$; atque multiplicando unam per alteram proditurum $bc + bx + cy + xy$, pro rectangulo linearum D G, G Y. quod aliunde quoque æquatur $df + bc$. Ac proinde, si utrinque commune auferatur rectangulum bc, relinquetur $xy + cy + bx \infty df$ quæ est æquatio proposita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & constructionum demonstratio ostendetur.

Æqua-

Æquatio 1ma.
$xy \infty df.$
Constructio.
Rectangulum AXY ∞df.
Asymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
$xy + cy \infty bx.$
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY ∞bc.

Æquat. 3.
$xy + bx \infty cy.$
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY ∞bc.

Æquat. 4.
$xy - cy \infty bx.$
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN, NO.
Rectang. NOY ∞bc.

Æquat. 5.
$xy + cy \infty df.$
Constr.
AB ∞c.
Asympt. QB, BX.
Rectang. BXY ∞df.

Æquat. 6.
$xy + bx \infty df.$
Constr.
AE ∞b.
Asympt. RE, EG.
Rectang. EGY ∞df.

Æquat. 7.
$xy - cy \infty df.$
Constr.
AC ∞c.
Asympt. SC, CX.
Rectang. CXY ∞df.

Æquat. 8.
$xy - bx \infty df.$
Constr.
AM ∞b.
Asympt. RM, MO.
Rectang. MOY ∞df.

Æquat. 9.
$xy + df \infty cy.$
Constr.
AH ∞c.
Asympt. AH, HT.
Rectang. HXY ∞df.

Æquat. 10.
$xy + df \infty bx.$
Constr.
AR ∞b.
Asympt. AR, RZ.
Rectang. RZY ∞df.

Æquat. 11.
$xy + cy - bx - df \infty o.$
Constr. quando df excedit bc.
AB ∞c, BL ∞b.
Asympt. QL, LO.
Rectang. LOY $\infty df - bc$.
Constr. cùm bc excedit df.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty bc - df$.

Æquat. 12.
$xy + bx - cy - df \infty o.$
Constr. quando rectang. df majus est rectangulo bc.
AC ∞c, CF ∞b.
Asympt. SF, FG.
Rectang. FGY $\infty df - bc$.
Constr. quando bc rectang. excedit rectang. df.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty bc - df$.

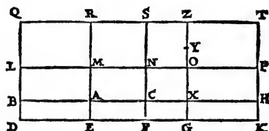
Æquat. 13.
$xy - cy - bx - df \infty o.$
Constr.
AC ∞c, CN ∞b.
Asympt. SN, NO.
Rectang. NOY $\infty df + bc$.

Æquat. 14.
$xy + cy - bx + df \infty o.$
Constr.
AB ∞c, BQ ∞b.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. QZY $\infty df + bc$.

Æquat. 15.
$xy + bx - cy + df \infty o.$
Constr.
AH ∞c, HK ∞b.
Asympt. EK, KT.
Rectang. KGY $\infty df + bc$.

Æquat. 16.
$xy - cy - bx + df \infty o.$
Constr. quando df superat bc.
AH ∞c, HP ∞b.
Asympt. MP, PT.
Rectang. POY $\infty df - bc$.
Constr. cùm bc superat df.
AH ∞c, HT ∞b.
Asympt. HT, TQ.
Rectang. TZY $\infty bc - df$.

Æquat. 17ma & ultima.
$xy + cy + bx - df \infty o.$
Constr.
AB ∞c, BD ∞b.
Asympt. QD, DG.
Rectang. DGY $\infty df + bc$.



Præterea evidens eſt, in 11ma, 12ma, & 16ta æquatione exiſtente rectangulo df æquali bc, ſi hoc ipſum in locum df ſubſtituatur, undecimam quidem tunc fore diviſibilem per $x + c$, duodecimam per $y + b$, & decimam ſextam per $c - x$; Vtramque autem 11^{mam} & 16^{tam} poſſe reduci ad $y \infty b$; aſt 12^{mam} ad $x \infty c$. Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur $y \infty b$, & X Y ipſi b ſit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipſi A X parallela, ut habeatur quæſita; Aut quando habetur $x \infty c$, & X A ipſi c ſit æqualis, erit parallela A R linea recta quæſita.

Cæterùm potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, tranſmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (ſicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere poſſunt, ordine diſpoſuimus); tum etiam conſtructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere ſub iis, quæ omnes habent completos: ſed quoniam multò prolixiori indiguiſſemus ſermone, & res ipſa minùs fuiſſet dilucida, ratione oſtensâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQVENTES, DE MODO INVENIENDI CONTINGENTES LINEARVM CVRVARVM.

Notandum hîc eſt, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expoſitum, conſiſtere in invenienda æquatione, in quâ linea y vocata ſumi poteſt pro duabus quantitatibus diverſis, cùm linea quæ vocatur v ad tangentem non refertur,

fertur, at verò cùm ad ipsam refertur, quòd tunc duæ illæ quantitates diversæ intelligantur æquales seu in unam cöalescere. Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$ aliave ex hac compositâ. Ejus rei proponamus sequens exemplum.

Esto linea recta A N, curva autem A M, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam A N ducatur perpendicularis M L, recta B C, ad arbitrium sumpta, unà cum A L, sit ad A L, sicut linea A L ad L M. Oportet rectam lineam invenire P M, tangentem hanc curvam A M in puncto M. Supponatur linea N M perpendicularis ad tangentem P M in puncto M, & B C ∞ b, A L ∞ y, & L M ∞ x. Hinc cum $b + y$ sit ad y ut y ad x, fiet æquatio talis: $bx + yx \infty yy$, ac proinde $x \infty \frac{y^2}{b+y}$. Iam verò pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam A M tangi à circulo cujus radius M N, satiùs est imaginari, quòd ipsa tangatur à recta linea M P: quandoquidem hoc modo superfluam multiplicationem evitamus. Quocirca statuendo A P ∞ v, & P K ∞ s esse parallelam ipsi L M, atque ab A K, quæ parallela est ipsi P M, secari in K; erit ut v ad s, sic $y - v$ ad L M seu $\frac{ys - vs}{v}$. Quæ quidem cum supra inventa sit $\infty \frac{y^2}{b+y}$, habebitur $\frac{yy}{b+y} \infty \frac{ys - vs}{v}$, vel $yy \infty \overline{\frac{bs - vs}{v - s}}$ in $y - \frac{bvs}{v - s}$, comparandum cum $yy \infty 2ey - e^2$. Vnde primò invenimus $\frac{bs - vs}{v - s} \infty 2e$, vel $s \infty \frac{2ev}{b - v + 2e}$. Deinde $\frac{bvs}{v - s} \infty e^2$, vel $s \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$, ac per consequens $\frac{2ev}{b - v + 2e} \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$. Hoc est, A P ∞ $v \infty \frac{be}{2b + e}$ seu $\frac{by}{2b + y}$, & P L ∞ $y - v \infty \frac{by + y^2}{2b + y}$. Cæterùm quoniam L M media

 est

est proportionalis inter P L & L N, erit L N $\propto \frac{2by^3 + y^4}{b^3 + 3b^2y + 3by^2 + y^3}$. Quod erat faciendum. Vel etiam sic, imaginando curvam A M tangi à circulo, cujus radius est M N. Omnino ut in hujus Geometriæ Methodo supponitur factum.

Igitur quoniam habemus $\frac{y^2}{y+b} \propto x$, ac proinde $x^2 \propto \frac{y^4}{y^2 + 2by + b^2}$, supponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, A N $\propto v$, & M N $\propto s$, & erit quadratum ex L M, hoc est, x^2, $\propto ss - vv + 2vy - yy$, ac idcirco $\frac{y^4}{y^2 + 2by + b^2} \propto ss - vv + 2vy - yy$. Vnde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, divisâque totâ summâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{llllll} y^4 + by^3 & + \tfrac{1}{2}vvyy & + bvvy & + \tfrac{1}{2}bbvv & \propto 0. \\ \quad - v & + \tfrac{1}{2}bb & - bbv & - \tfrac{1}{2}bbss & \\ & - 2bv & - bss & & \\ & - \tfrac{1}{2}ss & & & \end{array}$$

Iam verò multiplicando $yy - 2ey + ee \propto 0$ per $yy + fy + gg$, ut alteri reddatur similis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{lllll} y^4 + fy^3 & + ggyy & - 2eggy & + eegg \propto 0. \\ \quad - 2e & - 2ef & + eef & \\ & + ee & & \end{array}$$

Quæ si comparetur cum præcedente, quantitates secundi termini præbebunt $f \propto b + 2e - v$; ultimi $gg \propto \frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2}$; & tertii $\frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2} - 2be - 3ee + 2ev \propto \tfrac{1}{2}vv + \tfrac{1}{2}bb - 2bv - \tfrac{1}{2}ss$. Ac proinde si multiplicemus totum per $2ee$, producetur $+ bbvv - bbss - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 \propto vvee + bbee - 4bvee - ssee$, sive $bbvv - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 - vvee - bbee + 4bvee \propto bbss - eess$, & per consequens

$$\frac{\begin{array}{llll} -6e^4 & + 4ve^3 & - vvee & + bbvv \\ & - 4b & + 4bv & \\ & & - bb & \end{array}}{bb - ee} \propto ss.$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2 + b^2s^2}{e} + bee - vee + 2e^3 \propto + bvv - bbv - bss.$$

Vnde multiplicando totum per e, fiet

$$- bbvv + bbss + be^3 - ve^3 + 2e^4 \propto + bvve - bbve - bess,$$

ac

ac per consequens

$$\frac{\begin{array}{l} -2e^4 + ve^3 + bvve + bbvv \\ \quad\;\; -b \quad\; -bbv \end{array}}{bb + be} \infty\, ss.$$

Quocirca habebimus

$$\frac{\begin{array}{l} 6e^4 + 4ve^3 - vvee + bbvv \\ \quad -4b \;\; +4bv \\ \qquad\quad\;\; -bb \end{array}}{bb - ee} \infty \frac{\begin{array}{l} -2e^4 + ve^3 + bvve + bbvv. \\ \quad\;\; -b \quad\; -bbv \end{array}}{bb + be}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$\begin{array}{l} 2e^6 + 7be^5 + 8bbe^4 + 4b^3e^3 - 4b^3vee - b^4ve \infty\, 0. \\ \;\;\; -v \quad -4bv \quad -6bb \quad +b^4 \end{array}$$

Quam æquationem si dividamus per $ee + be$, orietur

$$\begin{array}{l} 2e^4 + 5be^3 + 3bbee - 3bbve - b^3v \infty\, 0: \\ \;\;\; -v \quad -3bv \quad +b^3 \end{array}$$

ac per consequens

$$2e^4 + 5be^3 + 3bbee + b^3e \infty\, b^3v + 3bbev + 3beev + e^3v.$$

ac demum $\frac{2e^4 + 5be^3 + 3b^2e^2 + b^3e}{b^3 + 3b^2e + 3bee + e^3} \infty\, v$.

Vbi si in locum e substituatur y, atque ex hac summa deinde auferatur linea A L $\infty\, y$, relinquetur L N $\infty\, \frac{2by^3 + y^4}{b^3 + 3bby + 3byy + y^3}$, ut supra. Vbi notandum, lineam hanc curvam non aliam esse quàm Hyperbolam, supra à nobis constructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

DEmonstranda hîc est operatio, quam hæc Geometria nos docet, cùm radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \infty\, 0$, cujus radicem incognitam x per lineam b multiplicare oporteat. Supponatur $y \infty\, xb$, & fiet $\frac{y}{b} \infty\, x$, ideoque $\frac{y^2}{b^2} \infty\, x^2$, nec non $\frac{y^3}{b^3} \infty\, x^3$. Proinde si substituamus in æquatione præcedente $\frac{y}{b}$ loco x, & $\frac{y^2}{b^2}$ loco x^2, itemque $\frac{y^3}{b^3}$ loco x^3, erit sequens æquatio $\frac{y^3}{b^3} -$

$\frac{cy^2}{b^2} + \frac{d^2 y}{b} - b^3 \infty 0$, æqualis præcedenti. Vnde multiplicando totum per b^3, producetur $y^3 - cbyy + ddbby - b^3b^3 \infty 0$. Evidens autem est, idem productum inveniri, si in æquatione proposita ponamus y, & quadratum ejus yy, cubumque y^3, loco x, x^2, x^3: atque deinde secundum terminum multiplicemus per b, tertium per b^2, & quartum per b^3. omnino ut hæc Geometria docet. Vbi, postquam substituimus $\frac{y}{b}$, $\frac{y^2}{b^2}$, & $\frac{y^3}{b^3}$ loco x, x^2, & x^3, ad multiplicandum totum per b^3, sufficit auferre denominatorem, qui ab b denominatur, atque tantùm reliquum secundi termini multiplicare per b, reliquum tertii per bb, & reliquum quarti per b^3: quandoquidem à terminis, secundo & tertio, auferendo denominatores bb & b, ipsi eatenus sunt multiplicati. Adeò ut sufficiat multiplicare reliquum secundi termini per b, & reliquum tertii per bb, at ipsum quartum per b^3, cum hic denominatorem ab b denominatum, per quem sic auferendo fuisset multiplicatus, non admittat. non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonstratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix x plures dimensiones, quàm in æquatione proposita, admittit.

Notandum autem est, cùm termini æquationis hujus sic productæ non singuli æquè multas literas seu dimensiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum sumpsimus, & cujus ratione supposuimus $\frac{y}{b} \infty x$, toties in terminis, qui pauciores dimensiones seu literas habent, subintelligendam esse, quoties fuerit opus. Adeò ut ejusdem lineæ beneficio termini abbreviari possint, sic ut singuli non nisi tres literas seu dimensiones admittant, ac præterea ut illius ope, postquam radix una y fuerit cognita, mediante æquatione $\frac{y}{b} \infty x$, cognoscatur quoque radix altera x.

Ad hæc supponere quoque possumus $yy \infty xb$, ita ut habeamus $\frac{y^2}{b} \infty x$, & $\frac{y^4}{b^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^6}{b^3} \infty x^3$; quibus, ut supra, subrogatis, habebimus $\frac{y^6}{b^3} - \frac{cy^4}{b^2} + \frac{d^2y^2}{b} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicando totum per b^3, fiet $y^6 - cby^4 + ddbbyy - b^3b^3 \infty 0$. Vnde perspicuum fit, quòd substituendo, juxta præscriptum hujus Geometriæ, yy pro x, quadratum ejus y^4 pro x^2, & ipsius

& ipsius cubum y^6 pro x^3, atque multiplicando secundum terminum per b, tertium per bb, & quartum per b^3, eandem consecuturi simus æquationem. ut ex demonstratione superiori facile est colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas seu dimensiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem spectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem est multiplicanda; ipsa eidem demonstrationi innititur.

Esto eadem, quæ supra, æquatio: $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$; & oporteat radicem incognitam x multiplicare per 3. Supponatur $y \infty 3x$, eritque $\frac{y}{3} \infty x$, & $\frac{y^2}{9} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{27} \infty x^3$. Quibus, ut supra, substitutis, fiet $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{ddy}{3} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicato toto per 27, exsurget $y^3 - 3cyy + 9ddy - 27b^3 \infty 0$. Quæ æquatio etiam invenitur, si in æquatione proposita substituamus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, loco x, quadrati x^2, & x^3 cubi; atque deinde secundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præscripto hujus Geometriæ. Quâ quidem operatione termini omnes, ob rationes supra allatas, æquè multas dimensiones acquirent.

Idem intelligendum est de exemplo in hac Geometria proposito, $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27}\sqrt{3} \infty 0$. Etenim supposito $y \infty x\sqrt{3}$, erit $\frac{y}{\sqrt{3}} \infty x$, & $\frac{y^2}{3} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} \infty x^3$. Vnde si in æquatione proposita substituamus $\frac{y}{\sqrt{3}}$, quadratum ejus $\frac{y^2}{3}$, & ipsius cubum $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3; invenietur $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{yy\sqrt{3}}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0$. Atque adeò si totum multiplicemus per $3\sqrt{3}$, habebitur $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$. Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum supra fuit ostensum.

Non secus fiet demonstratio, si de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$, sitque x dividenda per b.

Sup-

Supponatur $y \infty \frac{x}{h}$, eritque $y\,h \infty x$, & $y^2 h^2 \infty x^2$, nec non $y^3 h^3 \infty x^3$. Quæ si in æquatione proposita substituantur, fiet $y^3 h^3 - c h^2 y^2 + d^2 h y - b^3 \infty o$. Ac proinde si totum dividatur per h^3, orietur $y^3 - \frac{cy^2}{h} + \frac{d^2}{h^2} y - \frac{b^3}{h^3} \infty o$.

Manifestum autem est, idem nos obtenturos, si in æquatione proposita subrogemus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3, atque sic deinde secundum terminum dividamus per h, tertium per $h\,h$, & quartum per h^3: quoniam in superiori operatione, ubi $h\,h$ in secundo termino, & h in tertio reperitur, perspicuum est, quòd, ad dividendum omnes terminos per h^3, auferendo toties h, quoties in ipsis reperitur, opùs tantùm sit dividere reliquum secundi termini per h, reliquum tertii per $h\,h$, ipsum autem quartum terminum per h^3, quippe qui quantitatem h non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus sic productæ termini singuli non æquè multas habent literas seu dimensiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimensiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam subintelligere, quoties erit opùs, quæ lineam pro unitate ad libitum sumptam designet, & cujus ratione supposuimus $y \infty \frac{x}{h}$. vel potiùs beneficio hujus lineæ, quam pro unitate assumpsimus, & linearum cognitarum, efficere, ut singuli æquationis termini tres literas seu dimensiones habeant. Id quod facile est. Etenim cognitâ, v.g. lineâ $\frac{c}{h}$, pro unitate acceptâ, possumus ad eandem denotandam loco $\frac{c}{h}$ sumere p. atque ita de cæteris. Adeò ut, cognita radice y, ejusdem unitatis ope cognoscatur quoque x, per æquationem hanc $y \infty \frac{x}{h}$ vel $y\,h \infty x$.

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi ostendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ supra, $x^3 - c\,x^2 + d\,d\,x - b^3 \infty o$, & oporteat radicem incognitam x dividere per 3. Suppositâ igitur $y \infty \frac{x}{3}$, fiet $3\,y \infty x$, & $9\,yy \infty x^2$, nec non $27\,y^3 \infty x^3$. Quæ si substituantur in æquatione proposita, habebitur $27y^3 - 9\,c\,yy + 3\,d\,d\,y - b^3 \infty o$. Ac proinde dividendo totum

totum per 27, orietur $y^3 - \frac{1}{3}cyy + \frac{1}{9}ddy - \frac{1}{27}b^3 \infty 0$. Quæ æquatio quoque invenietur, si procedamus juxta hujus Geometriæ Methodum: subrogando nimirum y in æquatione proposita, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3: & dividendo deinde secundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipsius cubum 27. Eadem demonstratio locum obtinet, si in æquatione radix incognita plures dimensiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & sequentes.

Proponatur $x^4 * + px^2 + qx - r \infty 0$, & supponatur juxta præscriptum hujus Geometriæ $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, eritque $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$, ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc est, $x^4 + yyxx + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyx^2$, & consequenter $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Ex qua æquatione si tollatur prima $x^4 * + pxx + qx - r \infty 0$, relinquetur $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Vnde multiplicando totum per $4yy$, exsurget $y^6 + 2py^4 \begin{matrix} +p^2 \\ +4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Eâdem ratione demonstratio fiet secundùm omnes variationes signorum + & —, atque observationes in hac Geometria expositas. In cujus rei exemplum duorum adhuc sequentium casuum demonstrationem subjiciemus.

Sit æquatio proposita $x^4 * - px^2 + qx - r \infty 0$. Si ergo juxta hanc Geometriam supposuerimus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, habebimus $x^2 + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$. Vnde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 - px^2 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$. Et per consequens $x^4 + \frac{1}{4}y^4 - pxx - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. E qua si auferatur prima $x^4 * - pxx + qx - r \infty 0$.

relinquetur $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{qq}{4yy}$ ∞ o. Quare si totum multiplicemus per $4yy$, inveniemus $y^6 - 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\+4r\end{matrix} yy - qq$ ∞ o. Quod demonstrare oportebat.

Iam verò si ponamus $x^4 * + px^2 - qx + r$ ∞ o, supponendo secundùm hanc Geometriam $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ ∞ o; erit $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ ∞ $\frac{q}{2y} + yx$. Vnde quadratum prioris partis æquale erit quadrato posterioris, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp$ ∞ $yyx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$. Ac per consequens, $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4yy}$ ∞ o. E qua si tollatur prima $x^4 * + px^2 - qx + r$ ∞ o, remanebit $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy}$ ∞ o. Atque ideo si totum multiplicetur per $4yy$, invenietur $y^6 + 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\-4r\end{matrix} yy - qq$ ∞ o. Quod erat demonstrandum.

Non secus demonstrabuntur omnes reliqui casus secundùm utramlibet harum suppositionum: nimirum, $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y}$ ∞ o, aut $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y}$ ∞ o, observando tantùm signa + & —, quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4^or^ habet dimensiones, ad formam, in hac Geometria propositam, reduci possunt: nimirum, $+y^6 . 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\.4r\end{matrix} yy - qq$ ∞ o. signa + & — quæ præcipit, observando, sicut demonstravimus. Quo fit, ut, si divisionis beneficio æquationem propositam ad eam formam reducere possimus, ita ut post divisionem radix ejus y plures quàm duas dimensiones non admittat, ipsa per Geometriam communem, juxta præscripta paginæ 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri possit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y}$ ∞ o, & $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y}$ ∞ o, (observando signa + & —, ponenda locis, ubi sunt omissa) invenietur quoque radix x, cujus loco in altera æquatione pro radice supposueramus y. At verò si æquatio supra

ſupra inventa, denominata à radice y, ſic dividi nequeat, tunc conſiderare illam poterimus, velut tres duntaxat dimenſiones habentem, ſupponendo ſcilicet $z \propto yy$, ipſamque ſubſtituendo in æquatione ; adeò ut habeamus $z^3 - 2pz^2 \begin{smallmatrix} +pp \\ .4r \end{smallmatrix} z - qq \propto 0$. Quæ, obſervatis iiſdem ſignis + & —, quæ in altera æquatione reperiuntur, & ſublatô ſecundo termino, per id, quod pag. 73 dictum eſt, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus z per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & ſequentes. Quæ certe eadem futura eſt quæ yy, quâ cognitâ innoteſcet & y. Cujus ope atque duarum ſuperiorum æquationem tandem invenietur x.

Verùm enimverò obſervandum eſt, in omnibus præcedentibus operationibus utendum eſſe eâdem lineâ, quæ pro unitate eſt accepta, ſi illam determinamus, & uſurpamus ad æquationem propoſitam reducendam ad ſuperioris formam, nempe: $x^4 * px^2 . qx . r \propto 0$. obſervando ſigna + & —.

Verum equidem eſt, quòd, poſtquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice y ſit denominata, nimirum ad æquationem $y^6 . 2py^4 \begin{smallmatrix} +p^2 \\ .4r \end{smallmatrix} yy - qq \propto 0$, quæque dividi ſeu reduci non poſſit, ita ut radix ejus y plures quàm duas dimenſiones habeat, non teneamur ulteriùs progredi: (ſiquidem illo caſu Problema non Planum, ſed Solidum exiſtit, juxta pag. 80) atque tunc contenti eſſe poſſimus æquatione primâ $x^4 * px^2 . qx . r \propto 0$ (cum per illam invenire poſſimus radicem x mediante Geometriâ Solidorum, ſecundùm paginam 85 & ſequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti poſſumus, ſaltem ut oſtendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non aſcendit, reducuntur, ſemper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

QVandoquidem ex eo, quod in hac Geometria oſtenſum atque ſupra adnotatum eſt, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non

ascendunt, reduci posse ad aliquam formam earum, quæ hâc paginâ proponuntur: exhibenda tantùm restat demonstratio radicum, quæ ex ipsis, secundùm Cardani regulas, quas super hac re in medium affert Capite secundo libri ejus, quem de Arte Magna seu Regulis Algebraïcis inscripsit, educuntur. Cum hoc ipsum difficultatem fortè non exiguam parere posset iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Speciosæ Algebræ, & mutuæ inter Arithmeticam & Geometriam relationis atque convenientiæ ignaris, non facilè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonstrabimus primùm sequens

LEMMA.



SEctâ utcunque lineâ A C in B, ostendendum est: Cubum lineæ A B, unà cum cubo lineæ B C, & triplo producto linearum A C, B C, A B, simul æquari cubo lineæ A C.

Sit A B $\propto a$, B C $\propto b$, eritque A C $\propto a+b$. Productum linearum A C, B C, A B, erit $baa+bba$, cujus triplum $3\,baa+3\,bba$. Huic si addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3+3\,baa+3\,bba+b^3$. Et manifestum est, summam hanc æqualem esse cubo lineæ A C.

Demonstrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco $z \propto \sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$. Hinc in figura adjecta supponendo binomium $\sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ A C, & residuum $\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ B C, erit eorum differentia $\sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, $-\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ æqualis lineæ A B. Iam vero statuendo A B $\propto z$, erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum $+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, & cubum $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, (auferendo hunc ab illo) æqualis q. Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ B C. Atqui cubus lineæ A B, & triplum productum linearum A C, B C, A B simul, æquantur eidem differentiæ q, (siquidem cum cubo lineæ B C componunt cubum lineæ A C). Erit itaque z^3, cubus videlicet lineæ A B, unà cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æqualis q.

Vt autem habeatur hoc productum, multiplicandum est binomium $\sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquatur lineæ A C, per residuum $\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquale est lineæ B C. Hinc cum $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ in se multiplicatum faciat $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, ac $+\frac{1}{2}q$ in $-\frac{1}{2}q$ faciat $-\frac{1}{4}qq$; quæ producta simul addita faciunt $\frac{1}{27}p^3$ (siquidem $+\frac{1}{4}qq$ & $-\frac{1}{4}qq$ addendo evanescunt): & porrò producta, quæ fiunt ex $+\frac{1}{2}q$ & $-\frac{1}{2}q$ in $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, se mutuò destruant: Erit totum productum $\sqrt{C.\,\frac{1}{27}p^3}$ seu $\frac{1}{3}p$, radix scilicet cubica ex $\frac{1}{27}p^3$. quandoquidem quæstio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Vnde triplum productum erit p, quod si multiplicetur per A B, hoc est, per z, fiet pz, æquale triplo producto linearum A C, B C, A B. Et per consequens $z^3+pz \infty q$, vel $z^3 \infty -pz+q$. Quod erat demonstrandum.

Sit jam secundo loco

$$z \infty \sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

& supponatur prima radix cubica (quæ binomium est) in figura præcedente æqualis lineæ A B; secunda autem (quæ residuum est) æqualis lineæ B C; eritque summa cuborum utriusque lineæ æqualis q. Porrò supponendo lineam A C ∞ z, auferendoque ex ejusdem cubo z^3, triplum productum linearum A B, B C, & z, relinquentur cubi linearum A B & B C, qui quidem simul sumpti ipsi q sunt æquales. Est autem productum ex A B, B C, hoc est, quod fit ex binomio in residuum, $\sqrt{C.\,\frac{1}{27}p^3}$, seu $\frac{1}{3}p$. Nam cum multiplicando $+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ per $-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ (unâ radice existente signo + affectâ, alterâ verò signo —) producatur utriusvis quadratum affectum signo —, nimirum $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, & utramque radicem per $+\frac{1}{2}q$ multiplicando, producta evanescant; restat tantum $+\frac{1}{2}q$ in se multiplicandum. Quare cum productum illud sit $+\frac{1}{4}qq$, & alterum productum inventum sit $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$; erit totum productum $\sqrt{C.\,\frac{1}{27}p^3}$

ſeu $\frac{1}{3}p$, ſicut diximus, ac proinde ejus triplum p. Quod ſi rurſus multiplicetur per z, producetur pz, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C: & per conſequens $z^3 - pz \infty q$, hoc eſt, $z^3 \infty * + pz + q$. Quod erat demonſtrandum.

Adduxi autem demonſtrationem extractionis harum radicum, quòd contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi ſint viſæ. Verùm quantùm ad praxin, cùm Geometricè æquationum hoc loco propoſitarum radices ſunt extrahendæ; ejus ſanè methodus, quæ generalis atque facilis eſt, quàm optimè in hac Geometria demonſtrata cernitur. Si verò Arithmeticè illas extrahere lubuerit, multò id faciliùs fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numeroſa Poteſtatum Reſolutione traditam, quàm per haſce regulas Cardani.

FINIS.



FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

IN

GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

COMMENTARII.

ARGVMENTVM PRIMI LIBRI.



Rimo libro Autor viam quodammodo aperit ad suam Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriæ Problematis utitur, quamque tribus hisce libris est complexus. Quæ est, ut certarum notarum sive characterum beneficio, quibus tum data tum quæsita lineæ designantur, difficultates omnes, quæ in iisdem Problematis enodandæ veniunt, ad ejusmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum constructionem non nisi rectarum quarundam linearum longitudinem quærere sit opus. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quæ circa lineas hasce, ut cognitæ fiant, sunt instituendæ, ad 4 vel 5 diversas, quemadmodum in Arithmetica, revocari posse: quæ sunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio. Quâ quâ ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Vbi porrò observandum venit, quòd, postquam hi Arithmetices termini in Geometriam sunt introducti, ad operationes hasce in lineis æquè instituendas atque in numeris, consentaneum sit rectam lineam, quæ unitatis vicem gerat, assumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum est, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatis, ostendit, quo pacto notis atque literis in Geometria sit utendum ad prædictas lineas breviter designandas, earumque operationes facilè indicandas: ut hâc ratione diversæ earum relationes conspicuæ sint, atque difficultas omnis, verborum involucris exuta, quàm simplicissimè ob oculos poni possit. Et quia hæc Methodus in resolvendis Geometriæ Problematis requirit, ut difficultates omnes, quæ in illis evolvendæ occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quæratur tantummodò valor quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propositum perducatur ad æquationem, supponendo illud ipsum ut jam factum. Ac deinde, cum Æquatio certum sit medium quo Problema solvitur, refert totidem æquationes inveniendas esse, quot in eo suppositæ fuerint incognitæ lineæ. Cum autem hæc Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipsaque non tantùm ad Problemata, in quibus de inveniendis quibusdam rectis lineis, aut etiam planis solidisve quæstio est (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non nisi rectæ

quadam linea invenienda sint) adplicari possit; sed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter sese comparatio facienda est; atque ad Problemata in quibus quadam puncta aut linea data sunt, & alia puncta inveniri debent, se extendat (siquidem in his à quæsitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad positione datas recta linea duci possunt, qua quæsitorum punctorum loca determinant; in illis autem qua dictorum angulorum vices gerant, sicut post exemplis planum fiet): facilè constat, illam non modò Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram comprehendere; sed etiam ad id omne, ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi posse, atque adeò tam generalem esse, ut nullum non suæ artis per universam Mathesin specimen edat.

Iam verò postquam Problema aliquod ad æquationem est perductum, ipsaque æquatio ad simplicissimos terminos reducta, si quidem id ipsum per Geometriam communem construi potest, hoc est, ut ad constructionem ejus non nisi rectis lineis atque circulis utamur, prout in superficie aliqua plana describuntur, docet, qualis tunc debeat esse æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi possit. Atque ita breviter, quidquid ad planorum Problematum constructionem spectat, absolvit.

Vt autem tum præceptionum harum usui locus sit, tum verò ejusdem Methodi facilitas in resolvendo ac construendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam sibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut scientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, summâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre visum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illustranda esse duximus, fere sunt sequentia.

COM-

COMMENTARII
IN
LIBRVM PRIMVM.



T radicum extractio, quæ pro Divisionis quadam specie haberi potest.] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Est enim in Divisione, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu divisorem. Adeò ut radicis extractio divisionis species sit censenda, in qua divisor quotienti est æqualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem est media proportionalis. A

Vel etiam si una sit, quæ vocetur unitas.] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum. B

Vt eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum transmutandum in quadratum: si pro unitate sumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipsum & reliquum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata est extrahenda. Adeò ut manifestum sit, Problema propositum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem, nihil aliud esse, quàm si unâ lineâ assumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata. C

Vt ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est atque multiplicatio.] In multiplicatione enim est: ut productum ad multipli- D

candum, ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, sic multiplicandus ad unitatem.

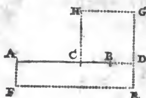
E *Vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione.*] Est namque in Divisione, ut supra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad divendum, sic unitas ad divisorem.

F *Vt si radix cubica sit extrahenda ex a a b b — b, cogitandum est, quantitatem a a b b semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hîc subintelligitur, esse c. Unde si quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimensione, semel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimensionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc est, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas sit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

G *Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessariæ videbuntur, tam iis quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim sunt termini modi unius, terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot supposita fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PROBLEMA 1^mum.

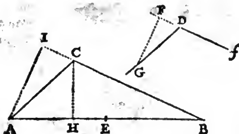
DAtam rectam lineam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum, æquetur quadrato rectæ C D.



Considero rem velut jam factam, hoc est, suppono rectangulum A D E F æquari quadrato C D G H, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæstio Geometrica eò reduci possit, ut non nisi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis sit quærenda, & nemo non videat, ad ejus constructionem tantummodo quærendam esse lineam B D, omnemque difficultatem in ea invenienda esse sitam; nomina impono lineis tam datis A C, C B, quàm quæsitæ B D. Proinde, pro linea A C pono quantitatem cognitam a; pro C B, b; at pro B D quantitatem incognitam x, fietque A D $a+b+x$, C D autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum A D E F, duco A D, hoc est, $a+b+x$ in D E seu D B, hoc est, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum C D G H, multiplico C D, hoc est, $b+x$ in se, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, sic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum translato bx ad alteram partem sub contrario signo, erit æquatio $ax-bx \propto bb$. Cujus utrâque parte divisâ per $a-b$, provenit $x \propto \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæsitam B D inveniri per divisionem quadrati lineæ C B per excessum, quo linea A C superat ipsam C B, vel etiam per hunc excessum, tanquam primam, & lineam C B, tanquam secundam, inveniendo tertiam proportionalem B D.

PROBLEMA 2^{dum}.

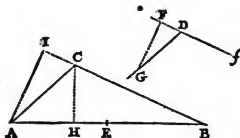
DAtâ rectâ lineâ terminatâ A B, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere A C, C B, continentes angulum A C B, æqualem dato D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum A C B rationem datam, ut 4 *d* ad *a*.



Factum sit quod quæritur, & ex puncto C demittatur super rectam A B perpendicularis C H. Quoniam igitur data sunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum situm determinandum nihil simpliciùs haberi potest, quàm si noscantur tres lineæ A H, H C, & H B: facilè constat, quæstionem propositam eò reduci, ut inveniendæ tantùm sint duæ lineæ A H, H C, seu B H, H C; atque adeò duas supponendas esse lineas incognitas. Quia verò, sectâ lineâ A B bifariam in E, datum est punctum E, atque ideo ipsa A E vel E B, quam voco a, atque operatio aliquantò brevior evadit, si loco dictarum A H, H C, seu B H, H C, quæramus duas lineas H E, H C: Idcirco pro H E pono quantitatem incognitam x, & pro H C quantitatem incognitam y. Unde pro A H invenitur $a - x$, & pro H B $a + x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto discrimine, directè percurrenda est Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis sit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex A C erit $aa - 2ax + xx + yy$: quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum A H & H C. Eodem modo quadratum lineæ C B erit $aa + 2ax + xx + yy$: quia æquale est binis quadratis ex B H & H C. Atque adeò summa quadratorum ex A C, C B erit $2aa + 2xx + 2yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum A B C, quod est ay, (utpote æquale semissi ejus, quod producitur ex basi A B & perpendiculo C H,) quam habet $4d$ ad a: erit productum ex $2aa + 2xx + 2yy$ in a æquale ei, quod provenit ex ay in $4d$, hoc est, habebitur Æquatio inter $2a^3 + 2axx + 2ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ suppositæ sunt incognitæ lineæ x & y, alia adhuc superest Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, considerandus insuper est angulus D, cui æqualis supponitur angulus A C B; qui si obtusus fuerit, produco lineam B C, donec ex puncto A in ipsam cadat perpendicularis A I, omnino ut factum est circa angulum D. Tum, quoniam datus est angulus D, dantur quoque rectæ D F & F G. Ac proinde si pro D F ponatur b, & pro F G c, gerent ipsæ vicem dati anguli D, fientque triangula A C I & G D F similia. Eâdem ratione similia erunt triangula H C B & A B I. Unde erit ut C B ad A B, sic C H ad A I, & B H ad B I. Quare si pro quadrato ex C B $\propto aa + 2ax + xx + yy$ brevitatis causâ scribatur ee, h. e., pro C B $\propto \sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$ ponatur e; fiatque ut e ad $2a$, sic C H seu y ad A I: erit A I $\propto \frac{2ay}{e}$. Similiter ut e ad $2a$, sic B H, seu $a + x$, ad B I: erit B I $\propto \frac{2aa + 2ax}{e}$. Tum subductâ B C seu e ex B I seu $\frac{2aa + 2ax}{e}$, relinquitur C I $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$. Jam cum C I sit ad A I, hoc est, $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, seu $2aa + 2ax - ee$ ad $2ay$, sicut D F ad F G, hoc est, b ad c: erit $2aac + 2acx - cee$, productum sub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit sub mediis. Quæ altera est Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis sint omissæ. Et quicunque omnia penitiùs inspexerit, se suo marte propositæ quæstionis solutionem ex illis huc usque perducere potuisse judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros seu terminos Analyticos est traducta, ita ut, quæ supersunt, cuilibet obvia esse possint, etiamsi de lineis, punctis, angulisque ampliùs

non



non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut sequitur. Quocirca cum primùm $2a^3 + 2axx + 2ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars per $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem translatis, inter xx & $2dy - yy - aa$. Deinde cum $2aac + 2acx - cee$ æquetur $2aby$, restituto valore quantitatis assumptæ ee, ipsoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \propto 2aby$. In qua si fiat porrò terminorum transpositio, ut cxx unam teneat Æquationis partem sub signo $+$ & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \propto aa - yy - \frac{2ab}{c}y$, seu $xx \propto aa - yy - 2fy$, (scribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum est quolibet nomine datas quantitates insignire).

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ sunt reliquæ quantitates inter se, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - 2fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \propto 2aa - 2fy$, seu, $dy \propto aa - fy$: & translato $2fy$ ad alteram partem, factâque utrobique divisione per $d + f$, fiet $y \propto \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non est difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \propto 2dy - yy - aa$,

pro

pro y ſubſtituatur ſumma jam inventa $\frac{a^2}{d+f}$, & pro yy ejuſdem ſummæ quadratum, nempe $\frac{a^4}{d^2+2df+f^2}$, invenietur $xx \propto \frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2+2df+f^2}$ & $x \propto \sqrt{\frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2+2df+f^2}}$. Vbi liquet, dd non debere eſſe minorem quàm $ff+aa$, cum aliàs Problema futurum eſſet impoſſibile. Cujus quidem conſtructio talis eſt.

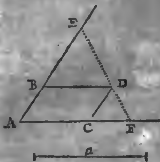
Facto angulo KAB æquali dato D, erigatur ex A ipſi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EL in L, centroque L intervallo rectæ d circulus deſcribatur, ſecans KA, EL in K & M. Deinde aſſumptâ EN æquali KA, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipſi AB occurrat in H. Poſtea deſcripto ex L intervallo LA circuli ſegmento ACB, ducatur ex H ipſi AB perpendicularis HC, occurrens cir-

cumferentiæ in C, ac jungantur A C, C B. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia sint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illustrare.

I PROBLEMA.

DAtis positione duabus rectis lineis concurrentibus A B, A C, punctum invenire intra ipsas D, à quo si ducantur duæ rectæ D C, D B ipsis A B, A C parallelæ, ut summa ipsarum D C, D B sit datæ rectæ a æqualis.



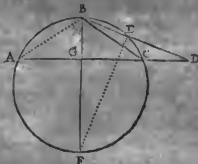
Ponatur factum quod quæritur, hoc est, suppositis rectis D C, D B ipsis A B, A C parallelis, statuantur & D C, D B simul sumptæ ipsi datæ a esse æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda sit longitudo utriusque rectæ A C, C D seu utriusque A B, B D, pono pro una A C vel B D quantitatem incognitam x, & pro altera C D vel A B quantitatem incognitam y. Quibus ita positis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantùm duæ rectæ B D, D C, hoc est, x & y: eritque summa $x + y$ æqualis a, hoc est, erit $y \propto a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro x inveniendam nulla superest materia, cum conditiones in quæstione præstandæ jam omnes sint impletæ: argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Quocirca cum in ipsâ una desit conditio, ut prorsus determinata existat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita x, cui nulla respondet Æquatio, assumere lineam aliquam cognitam ipsâ a minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipsi x diver-

diversos tribuerimus valores. Vbi notandum, quòd, postquam assumptæ fuerint rectæ A E, A F ipsi datæ a æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quodlibet in ea pro libitu sumptum quæsito satisfacere: cum, propter similia triangula A E F, & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F assumpto) haud aliter atque A E, A F semper sint æquales, ac proinde B D, D C simul eædem quæ A C, C F simul, hoc est, eadem quæ A F vel a.

Haud dissimilis erit quæstio, si punctum D inveniendum sit, ita ut ipsarum D C, D B differentia sit datæ rectæ a æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ super diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde secante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam secet in E, dantur B E $\propto a$, & B C $\propto b$: oporteatque invenire E D $\propto x$.



Quoniam ad quæstionem hanc solvendam, supponendo eam, ut jam factam, necessariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono y, & pro B F pono z: eritque G F $\propto z - y$. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, considero lineam G D ipsi B F esse perpendicularem, hoc est, triangulum B G C esse rectangulum. Unde fit, ut, si quadratum ex B G $\propto yy$ auferam è quadrato ex B C $\propto bb$, reliquum $bb - yy$ sit æquale quadrato ex G C. Quod idem & alio modo inveniri potest, considerando

perpendicularem G D secare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35 Tertii Elementorum rectangulum sub B G, G F est æquale rectangulo sub A G, G C, hoc est, quadrato ex G C: fit ut si multiplicavero G F $\propto z - y$ per B G $\propto y$ productum $zy - yy$ sit denuo quadrato ex G C æquale. Habetur ergo Æquatio inter $bb - yy$ & $zy - yy$, hoc est, addendo utrobique yy, inter bb & zy. Porrò cum in hac quæstione tres suppositæ sint incognitæ lineæ x, y, & z, superest ut duas adhuc alias Æquationes inveniamus. Hinc, ductâ F E, quoniam, considerando lineam B D secare circumferentiam in E, similia sunt triangula B G D & B E F, erit ut B G ad B D, hoc est, y ad $a + x$; ita B E ad B F, hoc est, a ad z. Ac proinde, cum productum sub extremis sit æquale producto sub mediis, erit $zy \propto aa + ax$. Quæ altera est Æquatio. In qua si in locum zy subrogetur ejus valor ante inventus bb, habebitur $bb \propto aa + ax$, hoc est, transferendo aa in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per a, erit $x \propto \frac{bb - aa}{a}$. Quæ quantitas est lineæ E D, quam investigare intendebamus. Cæterùm, quia inventâ hâc lineâ E D $\propto x$, utraque reliquarum incognitarum B G & B F, per y & z designatarum, quæ ad eam inveniendam necessariæ videbantur, ad arbitrium sumi potest, cum in Problemate nulla ampliùs materia supersit, quâ perveniatur ad Æquationes, quibus utraque ipsarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam sit evoluta: indicio est, rectam E D eandem semper inveniri, etiamsi ad illam quærendam pro utraque linearum B G, B F diversa magnitudo accipiatur, hoc est, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, si de linearum B G, B F longitudine ex datis B E, B C investigandâ quæritur, haud determinatum existit, sed tantùm ipsius E D.

Qui plura in loci hujus illustrationem exempla desideret, videat quæ ad literam G secundi libri à nobis sunt allata.

GGG *Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.*] Sic, quoniam, reducto Problemate aliquo, in quo ad ipsum construendum tres supponendæ

dæ sunt incognitæ lineæ x, y, & z, ad duas Æquationes

$$xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2z\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cz\end{array}, \& \; yy \infty aa + 2zx - xx,$$

pro incognita linea z, cui nulla respondet Æquatio, ad arbitrium sumi potest linea cognita d: potero in locum duarum præcedentium Æquationum scribere

$$xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}, \& \; yy \infty aa + 2dx - xx.$$

Hinc cum duæ supersint lineæ inveniendæ x & y, ordine quoque utenda erit unaquâque Æquationum reliquarum

$$xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}, \&$$

$yy \infty aa + 2dx - xx$, sive eas considerando separatim, sive unam cum altera comparando, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis. Quocirca considerando separatim Æquationem $yy \infty aa + 2dx - xx$, cum, quantitatibus $+aa$ & $-xx$ ad alteram partem sub contrario signo translatis, fiat $2dx \infty yy + xx - aa$: hinc si in altera Æquatione

$$xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$$

pro $2dx$ substituatur $yy + xx - aa$, habebo Æquationem $xx \infty + 2cx, + yy + xx - aa, + bb - cc - yy - 2cd$. Hoc est, demptis æqualibus, ordinatâque æqualitate, habebitur $2cx \infty aa + cc - bb + 2cd$. Et fit, divisâ utrâque æqualitatis parte per $2c$, $x \infty \frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$. Ostendens quâ ratione linea incognita x ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumendâ d sit invenienda. Inventâ autem lineâ x, ut habeatur y, oportet tantùm in Æquatione superiori $yy \infty aa + 2dx - xx$ in locum x subrogare valorem inventum $\frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$, & in locum xx hujus valorem, & fit $yy \infty \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}$. Vn-

de, extractâ radice, invenitur

$y \propto \sqrt{\frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}}$. Exhibens quo pacto linea incognita y ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumenda d., obtineri possit.

Cæterùm quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam d, quæ hîc modò major modò minor ad arbitrium sumi potest, lineæ quoque x & y inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum existit, sed infinitas recipit solutiones: lubet & alterum Problema, quod omnino determinatum est, atque in cujus solutione, ad unumquemque ex quæsitis numeris investigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

PROBLEMA.

INvenire duos numeros, quorum summa multiplicata per summam suorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Supposito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæsito $x + y$, & pro minori $x - y$: eritque summa quæsitorum numerorum $\propto 2x$, & eorundem differentia $\propto 2y$.

Jam quia $x + y$ & $x - y$ in se ducti faciunt $xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$, quorum summa est $2xx + 2yy$ & differentia $4xy$: restat ut $2xx + 2yy$ multiplicata per $2x$, & $4xy$ per $2y$, producta $4x^3 + 4xyy$ & $8xyy$ sint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus $4x^3 + 4xyy \propto 715$ & $8xyy \propto 99$, ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus x & y, comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primùm utramque partem prioris per 2, & fit $8x^3 + 8xyy \propto 1430$, ac deinde ex ea subtrahendo posteriorem $8xyy \propto 99$, & relinquitur $8x^3 \propto 1331$. In quâ, si utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur $2x \propto 11$, & fit $x \propto 5\frac{1}{2}$.

Postea ad inveniendum y dividatur Æquatio posterior $8xyy \propto 99$ per jam inventam $2x \propto 11$, & oritur Æquatio $4yy \propto 9$.

In

In qua si utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur $2y \propto 3$, & fit $y \propto 1\frac{1}{2}$.

Cæterùm invento utroque numero incognito x & y, quoniam pro majori quæsitorum posueramus $x+y$ & pro minori $x-y$: erit major $\propto 7$, & minor $\propto 4$. Et solutum erit Problema. H

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive sursolidum, sive quadrato-cubus &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo

$$z \propto b, \text{ aut}$$
$$zz \propto -az + bb, \text{ aut}$$
$$z^3 \propto +azz + bbz - c^3, \text{ aut}$$
$$z^4 \propto +az^3 + bbzz - c^3z + d^4, \text{ \&c.}]$$

Hoc est, z, quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis quantitati cognitæ b. Aut quadratum lineæ z est æquale ei, quod provenit subtrahendo az ex bb: quarum quidem bb cognita est; sed az composita ex z media proportionali inter unitatem & quadratum zz, ut supra explicavimus, & ex quantitate cognita a. Aut cubus lineæ z æqualis est ei, quod provenit ex additione & subtractione trium quantitatum azz, bbz, & c^3; quarum quidem c^3 cognita est; at bbz composita ex z, prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum z^3, & ex quantitate cognita bb; ac denique azz, composita ex zz, secunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita a. Atque sic de cæteris.

Vbi notandum est, per quantitates cognitas, intelligendas esse eas, quæ in quæstione vel datæ sunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditas & notas, sic præparatæ sunt, ut pro cognitis sive datis sint habendæ, atque quæsitis sive incognitis æquiparandæ.

Sic cùm ponitur $z \propto b$, indicatur lineam incognitam, quæ per-

per z designatur, æqualem esse alicui ex cognitis, quæ designatur per b. Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerunque aliqua operatione seu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Vt, si fuerit $z \propto \frac{cd}{e}$. Assumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum c, d, quæ in se invicem ductæ numeratorem constituunt, dividenda est reliqua per denominatorem, sive quantitatem e (quemadmodum superiùs est ostensum); eritque quotiens divisionis æqualis quantitati incognitæ z.

Eodem modo si habeatur $z \propto \frac{cc+cd}{e-f}$, erit ut $e-f$ ad $c+d$, ita c ad z; sive ut $e-f$ ad c, ita $c+d$ ad z.

Et si sit $z \propto \frac{cc-dd}{e+f}$, erit $e+f$ ad $c+d$, sicut $c-d$ ad z; vel $e+f$ ad $c-d$, sicut $c+d$ ad z.

Nec non si habeatur $z \propto \frac{cd+ef}{g}$, & fiat, ut c ad e, sic f ad quartam, quæ vocetur h: poterit pro ef scribi ch, atque adeò loco $\frac{cd+ef}{g}$ substitui $\frac{cd+ch}{g}$. Vbi deinde si fiat ut g ad c, sic $d+h$ ad quartam: sive permutando (quod eodem recidit) ut g ad $d+h$, sic c ad quartam, quam vocare lubet b: erit $z \propto b$. Id quod & aliis modis præstari potest.

Non secus si sit $z \propto \frac{cdef}{ade-agh}$, & statuatur esse ut a ad c, sic e ad quartam, quæ sit i; erit $ai \propto ce$, ita ut pro $\frac{cdef}{ade-agh}$ scribi possit $\frac{adif}{ade-agh}$ seu $\frac{dif}{de-gh}$. Rursus si ponamus esse ut d ad g, sic h ad quartam, quæ sit k: erit $dk \propto gh$, ita ut in locum $\frac{dif}{de-gh}$ subrogari possit $\frac{dif}{de-dk}$ seu $\frac{if}{e-k}$. Vbi denuo si fiat, ut $e-k$ ad i, ita f ad quartam, quam vocabo b; fiet ut supra $z \propto b$. Quod idem variis modis fieri potest.

Denique sit $z \propto \frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$. Supponendo esse ut a ad d, ita d ad quartam, quæ nominetur e: erit $ae \propto dd$: poteritque pro $\frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$ substitui $\frac{aace-aacc}{aed+acd}$ seu $\frac{ace-acc}{ed+cd}$. Rursus statuendo esse ut $e+c$ ad $e-c$, sic c ad quartam quæ appelletur f,

fiet

fiet $\frac{ce-ec}{e+c} \infty f$: licebitque pro $\frac{ace-acc}{ed+cd}$ reponere $\frac{af}{d}$. Vbi demum si fiat ut d ad f, ita a ad quartam, quæ vocetur b, fiet rursus, ut supra, $z \infty b$. Quod similiter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus constat, quantitatem incognitam z, post hujusmodi operationes atque cognitarum linearum requisitas præparationes, eò reduci posse, ut sub una semper specie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas esse æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, absque additione vel subductione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitas. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantùm aliquam radicem, inveniri potest. Vt cùm zz æquatur aq. Suppositâ lineâ a pro unitate, erit radix quadrata extracta ex linea q, ut superiùs est ostensum, (nimirum inveniendo inter lineas a & q mediam proportionalem,) æqualis quæsitæ lineæ z, quæ hoc modo denotatur : $z \infty \sqrt{\ aq}$. Vbi apparet, quæstionem per hanc extractionem, dum planum aq transmutatur in quadratum bb, cujus latus est b, eò esse reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo si z^3 æquetur aaq, & quæratur z. Assumptâ rursus a pro unitate, erit extracta ex q radix cubica, hoc est, inventarum inter a primam & q quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro ostenditur) prior, radici quæsitæ z æqualis. Designabitur autem hoc pacto : $z \infty \sqrt{C.\ aaq}$. Vbi similiter constat, quòd, dum hâc operatione solidum aliquod, utpote aaq, resolvitur in cubum b^3, & utrobique deinde extrahitur radix cubica, z rursus fiat ipsi b æqualis.

Nec aliter evenit cum $z^4 \infty aaqq$. Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata seu bi-quadrata, hoc est, postquam radix semel extracta, dat $zz \infty aq$, eadem adhuc semel repetita radicis extractio, dabit $z \infty \sqrt{\ aq}$, sive, supponendo aq in quadratum bb esse conversum, $z \infty b$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

Porrò advertendum est, si quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, sub alia specie, quàm hîc expositum fuit, oblatæ fuerint (ut si ex $aa + bb$, aut ex $\frac{aadd - aaff - aa}{dd + 2df + ff}$ &c. extrahenda sit radix quadrata): quòd tunc facile sit, non solùm per ea, quæ jam tradita sunt, sed & aliis modis quantitates datas in alias transmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ sint, ac si ex quantitate aq extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliisque in infinitum, est intelligendum.

I *Atque ideo sufficiet vos monere, si quis in reducendis hisce æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus, quæ fieri possunt, &c.*] Vbi notandum, inter quatuor operationum species, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæstionis difficiliores, quippe quos tantùm signis $+$ vel $-$ conjungunt aut disjungunt; quæ quidem signa diversa genera non constituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea est, quâ termini involvuntur vel intricantur, & dimensiones augentur; quæ contra Divisione extricantur & minuuntur. Idem de radicum extractione intellige, quæ, ut supra dictum fuit, divisionis tantùm species est habenda. Adeò ut ad inveniendos terminos simplicissimos, ad quos quæstio aliqua reduci queat, maximopere observandum sit, ut in reducendis Æquationibus, omnes divisiones atque extractiones, quæ fieri possunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans suggerere potest demonstratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

K *Erit tota O M æqualis z, lineæ quæsitæ. Quæ quidem sic exprimitur: $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.*] Sciendum hîc est, æquationem propositam $zz \propto az + bb$, juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69, aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falsa appellatur, quæque hîc per lineam P M designatur, atque hoc modo exprimitur $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quemadmodum facilè demonstrari potest. Si enim, positâ $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ auferatur utrinque $\frac{1}{2}a$, & inde utraque pars $z - \frac{1}{2}a$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ in se ducatur quadratè, fiet $zz - az + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Vbi si demum utrinque dematur $\frac{1}{4}aa$, & $-az$ in alteram partem transferatur, fiet $zz \propto az + bb$.

Erit-

Eritque reliqua PM æqualis y, radici quæsitæ: Ita ut fiat $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.] Verùm æquatio $yy \propto -ay + bb$ admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam OM designata ita exprimitur, $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Cujus demonstratio ad exemplar præcedentis fieri potest. L

Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \propto -axx + bb$. *PM enim esset xx, & haberetur* $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.] Quoniam enim $x^4 \propto -axx + bb$, transferendo $-axx$ in alteram æquationis partem, erit $x^4 + axx \propto bb$. & additâ utrique parti $+\frac{1}{4}aa$, proveniet $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Iam verò extractâ utrobique radice, invenietur $xx + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ac proinde transponendo $+\frac{1}{2}a$, ut xx unam constituat æquationis partem, erit $xx \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde extractâ rursus utrinque radice, fiet $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. M

Eodem modo si habeatur $z^4 \propto az^2 + bb$, erit

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Nam cum $z^4 \propto az^2 + bb$, erit per transpositionem $z^4 - az^2 \propto bb$. Addatur jam utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Vnde, extractâ utrobique radice, prodibit $z^2 - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. hoc est, $z^2 \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & per consequens

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Similiter si sit $z^4 \propto az^2 - bb$, erit $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$, nec non $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Cum enim z^4 æquetur $az^2 - bb$, & per transpositionem $z^4 - az^2 \propto -bb$; addatur utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa - bb$. Quare extractâ utrobique radice, emerget $z^2 - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Porrò, quoniam radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa$ est quoque $\frac{1}{2}a - z^2$, hinc & $\frac{1}{2}a - z^2 \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$.

Cæterùm ut Geometricè inveniantur harum æquationum radices, sciendum est, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimensiones, toties illic, ubi numero pauciores habentur, subintelligenda sit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione $x^4 \infty - axx + bb$. Quia in termino axx tres duntaxat dimensiones reperiuntur, & in termino bb tantùm duæ, cogitandum est, terminum axx, ut dimensiones fiant æquales, semel per unitatem esse multiplicatum; terminum autem bb bis. Adeò ut, si pro unitate accipiamus c, æquatio sit $x^4 \infty - caxx + ccbb$. Verùm expedit unitatem illam tantisper dissimulare, & æquationem hanc $xx \infty - ax + bb$ usurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum est, invenerimus, nimirum lineam PM, quæ exprimitur hoc pacto: $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Ita ut deinde tantùm opus sit ex $- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ extrahere radicem quadratam seu inter inventam lineam PM & unitatem c invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix $x \infty \sqrt{- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Atque ita in aliis.

Vnde liquidò constat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc simul manifestum sit, quo pacto, postquam sic linea aliqua pro unitate assumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc est, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio construi possunt, per ea tantùm, quæ ab Authore per 4 figuras 1^{mi} libri exposita sunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7 monuit.

N *Quod si circulus, centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat, constructionem Problematis propositi esse impossibilem.*] Quod itidem ex Æquatione cognosci potest. Nam cum Æquatio sit certum medium, quo Problema aliquod resolvitur, sanè, si resolvendo incidimus in æquationem impossibilem, argumentum est, Problema quoque esse impossibile. Arguitur autem impossibilitas illa ex contradictione,

quam

quam involvit, cùm nempe in ea statuitur minor quantitas æquari alicui majori, vel cùm jubemur ad eam resolvendam aliquid præstare, quod fieri nullo modo potest, ut, quantitatem aliquam majorem à minore subducere. Quemadmodum in æquatione $zz \propto az - bb$. quoniam ad inveniendam radicem z, bb ex $\frac{1}{4}aa$ subtrahi debet; oportet ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, sive ut b non sit majus quàm $\frac{1}{2}a$. Aliàs enim radix ejus sic explicari non posset, & æquatio impossibilis foret. Quod & ex ejusdem constitutione licet agnoscere, si in ea duæ sint radices veræ. Si enim ponamus $z \propto c$, seu $z - c \propto 0$, itemque $z \propto d$, seu $z - d \propto 0$, atque deinde multiplicemus $z - c \propto 0$ per $z - d \propto 0$, exsurget æquatio $z^2 \begin{matrix}-c\\-d\end{matrix} z + cd \propto 0$, seu $zz \propto \begin{matrix}+c\\+d\end{matrix} z - cd$. In qua si $+ c + d$ interpretemur per $+ a$, & $- cd$ per $- bb$, habebimus æquationem propositam $zz \propto az - bb$. Adeò ut constet æquationem hanc duas veras radices admittere, seu quæ majores sunt quàm 0, quarum quidem summa est a, & productum ex earum multiplicatione bb.

Sed ut duas semper veras radices recipiat, requiritur, ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, seu, b non majus quàm $\frac{1}{2}a$: quoniam maximum productum quod fit ex partibus ipsius a, est, cùm a in duas partes æquales dividitur. Vbi notandum, quòd ubi $bb \propto \frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a$ esse z, quæ quæritur, atque æquationem eo casu unam tantùm sortiri radicem, aut duas quidem, sed æquales. At verò bb existente majore quàm $\frac{1}{4}aa$, æquationem esse impossibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod similiter de æquatione $zz \propto - az - bb$ est intelligendum, quæ de duabus falsis radicibus est explicabilis. Vt patet ex ejus constitutione. Etenim ponendo $z \propto - c$ seu $z + c \propto 0$, nec non $z \propto - d$ seu $z + d \propto 0$, & multiplicando $z + c \propto 0$ per $z + d \propto 0$: proveniet Æquatio

$$zz \begin{matrix}+c\\+d\end{matrix} z + cd \propto 0, \text{ seu } zz \propto \begin{matrix}-c\\-d\end{matrix} z - cd.$$

In qua si interpretemur $- c - d$ per $- a$, & $- cd$ per $- bb$, emerget æquatio proposita $zz \propto - az - bb$. Cujus porrò radices Geometricè inveniuntur perinde atque Æquationis præcedentis quæ denique sic exprimuntur $z \propto - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Cæterùm quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam

videlicet $zz \propto az + bb$, & secundam $yy \propto -ay + bb$, eæ nulli determinationi sunt obnoxiæ, & semper per duas radices explicari possunt, unam veram & alteram falsam. Vt si ponatur $z \propto c$, seu $z - c \propto 0$, & $z \propto -d$, seu $z + d \propto 0$, & multiplicetur $z - c \propto 0$ per $z + d \propto 0$; fiet $z^2 \begin{smallmatrix} -c \\ +d \end{smallmatrix} z - cd \propto 0$, seu $z^2 \propto \begin{smallmatrix} +c \\ -d \end{smallmatrix} z + cd$. In qua æquatione si statuamus c majorem esse quàm d, ita ut excessus sit penes c cum signo $+$, atque $+c-d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $+bb$, habebimus eandem æquationem, quam priùs, nimirum $z^2 \propto az + bb$. Adeò ut perspicuum sit ipsam de duabus inæqualibus radicibus esse explicabilem, majore vera & minore falsa. At verò si ponamus c minorem quàm d, ita ut excessus sit penes d cum signo $-$, atque $+c-d$ interpretemur per $-a$, & $+cd$ per $+bb$; prodibit æquatio secundæ formæ: nimirum, $z^2 \propto -az + bb$, quippe quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor est vera, major autem falsa. Denique si d constituatur ipsi c æqualis, destruent se invicem $+c$ & $-d$, & evanescet secundus terminus az, & erit Æquatio $z^2 \propto * + bb$, cujus duæ radices, vera $+b$ & falsa $-b$, sunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè resolvendas, earumque radices juxta regulas hîc traditas commodè explicandas, requiri, ut ultimus terminus designetur per bb, aut ad eam formam, sicut superiùs est ostensum, reducatur.

ARGVMENTVM SECVNDI LIBRI.



Ecundus liber agit de lineis curvis, earumque naturam explicat, docendo, quanam illæ sint, quas in Geometriam recipere oportet, quæque Geometricæ appellandæ sunt, itemque quo pacto possint cognosci. Modus autem eas cognoscendi in eo consistit, quòd describi possint per motum aliquem continuum, vel per plures ejusmodi motus, quorum posteriores regantur à prioribus. Verùm enimverò licèt allato modo descriptæ curvæ omnes in Geometriam sint recipiendæ, atque pro Geometricis agnoscendæ; tamen ad comprehendendas omnes, quæ sunt in natura, & ipsas ordine distinguendas in certa genera, prout gradatim magis magisque in infinitum sunt composita, aptiùs quidquam afferri nequit, quam ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas esse appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta certam habent relationem, quæ exprimi potest per aliquam æquationem, se indifferenter ad omnia utriusque lineæ puncta extendentem. Et quidem, quòd, cùm æquatio illa ultra rectangulum sub duabus quantitatibus indeterminatis, (quæ ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipsis non ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis (in quo tantum Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ.) At verò cùm ipsa ad tres quatuorve dimensiones ascendit, quòd illa tunc sit secundi generis. Cùm verò ad 5 aut 6 dimensiones adscendit, quòd illa tunc sit tertii generis. Atque ita porrò in infinitum.

Vbi porrò facile est intelligere, quanam sint, quæ ex Geometria sint rejiciendæ, & inter Mechanicas ponendæ: Quandoquidem curvæ illæ omnes, quæ inter prædictas non comprehenduntur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujusmodi sunt illæ omnes, quæ per motus continuos describi nequeunt, & ubi posteriores à prioribus non dependent, sed per duos motus describi concipiuntur, qui sunt à se invicem distincti, nullamque relationem habentes, quæ possit exactè mensurari, sive quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta relationem non habent, quæ per aliquam æquationem omnibus communem exprimi possit.

Postquam autem ostendimus, quo pacto lineæ curvæ ab Auctore distinguantur, tam in illas, quas in Geometriam censet introducendas, quam in illas, quas pari jure ab ea censet arcendas: ac denique quâ ratione

ne illæ in certa genera sint distinguendæ; operæ pretium videtur ut deinceps ea, quæ Antiqui circa ipsas contemplati fuêre, expendamus. Quæ quidem ex iis, quæ afferuntur à Pappo ad propositionem 4^tam libri tertii, ut & ad prop^nem 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum, haud difficulter colligi possunt. Ubi, postquam explicavit, Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuisse constituta, quorum alia dicuntur Plana, alia Solida, alia denique Linearia; nimirum prout quædam ex ipsis solvi possunt, describendo tantùm rectas lineas & circulorum circumferentias; & alia, quæ construi nequeunt, quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica sectio; & reliqua denique quin in constructionem assumatur alia demum curva linea: Tandem de duarum mediarum inventione loquitur, quas inquit Geometricæ rationi innixos invenire non potuisse. Quorum quidam, asserentes, Problema solidum esse, resolutionem per Conicas sectiones, sive solidos locos, fecerunt; alii autem per alias curvas, sive locos lineares; ac alii denique constructionem ejus instrumentis tantum perfecerunt. Nullum autem eorum fuisse, qui resolutionem per locos planos, sive rectas lineas & circulares, absolverit.

Ubi apparet, quòd tantummodo constructiones illas Geometricas appellaverint, quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur; quodque constructiones in genere non aliter respexerint, quàm quatenus ipsarum perfectio à manuum dexteritate & instrumentorum perfectione proficisceretur. Unde cum ad planorum Problematum constructiones non nisi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas esse viderent, quæ omnium facillimè atque expeditissimè regulæ & circini beneficio (utpote per instrumenta omnino simplicia) in plano describuntur, & sectiones Conicas reliquasque curvas lineas, varium & difficilem ortum habentes, in plano designare difficile existimarent, ideoque descriptionem earum minus certam statuerent; factum inde quoque, ut solam Planorum constructionem, Geometricam pronuntiarent: adeoque non nisi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item, pro Geometricis agnoscerent. Quod quare ita distinxerint, non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atque Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses ex Cono secari posse ab Apollonio scio ostensum. Qui porrò postquam plurimas proprietates tribus hisce sectionibus pariter atque Circulo convenire ostendit, & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonstrationes, cum non solum illâ tempestate, verum etiam sequentibus sæculis, magnus Geometra sit appellatus, non apparet quam ob causam prædictæ lineæ non æquè ac recta & circulares pro

Geo-

Geometricis fuerint habitæ. Adeò ut non solùm Veteribus illis, sed etiam Vieta ejusque asseclis assentiri nequeam, dum Geometriæ defectum hic suspicantes, neque Hyperbolas, neque Parabolas κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον in Geometricis describi asseverant, ac proinde Menachmi inventionem duarum mediarum per Parabolæ & Hyperbolæ, sive etiam per binarum Parabolarum intersectionem, veluti non Geometricam respuunt. Quam sanè (meo judicio) non minùs Geometricam censere oportet, quàm illam, quæ ab Euclide affertur in Problemate 1^mum Libri 1^mi Elementorum: siquidem punctum, in quo hæ sectiones sibi mutuò occurrunt, non minùs scientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli se invicem intersecant, ad describendum triangulum æquilaterum.

Caterùm si afferatur, ideo hasce lineas Geometricas non fuisse dictas, eò quòd instrumentis describi viderent; Annon ob eandem rationem linea recta & circularis non Geometricæ fuissent dicendæ, cum ad illas in plano describendas regulâ atque circino sit opus? Adeò ut si τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν Vieta vocaverit constructionem illam quatenus ipsa regulæ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificiosam atque scientificam appellare licebit constructionem illam, quæ non nisi instrumentis perfici potest, quæ majorem industriam atque artificium in sui compositionem requirunt, cujusque demonstratio simul ex penitiori Geometriæ penu est depromenda? Quocirca cum recta & circularis non Geometricæ non dicantur, neque etiam constructiones per ipsas factæ; ratum igitur esto, quòd neque Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudque primum (ut supra dictum fuit) apud Auctorem nostrum constituunt; neque etiam omnes superiorum generum curvæ, constructionesque quæ per ipsas fiunt, alia quàm Geometricæ sint habendæ, prout demonstratio illas tales esse comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta sufficiant. Restat ut porrò ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.

Explicatâ linearum curvarum naturâ resumit quæstionem Pappi ab Antiquis quæsitam, quam primo libro explicuit, atque resolvere incepit; talem deinde ipsam declarans, ut postquam in aliis atque aliis lineis proposita est, illa quoque alias atque alias curvas lineas, solutionem præbentes, quæque diversi generis sint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Adeò ut nulla curva linea sit sub calculum cadens, quæque in Geometriam juxta ejus definitionem recipi possit

quod sanè observatione dignum,) quæ non etiam simul pro certo aliquo linearum numero utilis existat.

Ubi præterea notandum est, quòd eam sic resolvere doceat, ut simul omne illud, quod ad locorum planorum atque solidorum compositionem spectat, exponat, sicque paucis complectatur, non solum quæstionis propositæ solutionem in tribus quatuorve lineis, sed etiam solidorum locorum compositionem, tantopere à Veteribus quæsitam. Nullos enim ex istis locis omisit, præter omnium simplicissimos, quos facilitatis causâ neglexit.

Post hæc autem, quæstione in 5 lineis propositâ, docet quænam prima & simplicissima sit linearum omnium, quæ ibidem inservire possint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quòd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, sufficiat scire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, sicut etiam quo pacto inveniri possint lineæ rectæ, quæ ipsas secent in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem subtilissimâ ac mirabili prosequitur methodo, meoque judicio dignâ, ut inter ingeniosissima hominum inventa celebretur. Posteà verò ne quid desit, quod ad usum curvarum linearum ibidem propositarum spectare videretur, ostendit ipsas diversas habere proprietates, quæ nequaquam sectionum Conicarum proprietatibus cedunt, describitque quædam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per specula & vitra, apprimè conducibilia: adeoque in Catoptricâ atque Dioptricâ usum insignem habentia. Denique ostendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam possint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum describi possunt. Atque ita, quæcunque ad curvarum linearum cognitionem necessaria sunt, breviter absolvit. Quantùm autem ad Geometriam promovendam, ejusque arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoscendas hic liber faciat, vel ea ipsa quæ in illo pertractantur, ac modò recensuimus, testari possunt; tum etiam, quia in eo via ad surdesolida, altioraque loca, hactenus incognita, investiganda sternitur, atque in eo infinitæ speculationis campus aperitur.

COM-

COMMENTARII

IN

LIBRVM SECVNDVM.

QVEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola.*] Si enim producatur A G ad D, ut D G æqualis sit E A seu N L, & per D agatur recta D F ipsi C K parallela, occurrens rectæ A B in F: erit D F una ex Asymptotis, & A F altera. Quod facilè demonstrari potest. Supponamus namque lineam G O C E Hyperbolam esse, cujus Asymptoti D F, F A, & utraque D G, E A æqualis sit ipsi N L; nec non D F ipsi C K parallela, ut diximus;

mus; hoc est, angulus DFA æqualis sit angulo CKB. Producatur autem BC, ut secet DF in I; & per D agatur recta DH parallela ipsi AF, occurrens cum BC in H. Quoniam igitur similia sunt triangula DHI & KLN triangulo FAD, erunt & ipsa inter se similia. Vnde erit ut KL ad LN, hoc est, ut b ad c, ita DH seu AB, hoc est, x, ad HI, quæ ideo erit $\frac{cx}{b}$. Deinde subductâ HI ex HB seu DA, hoc est, $\frac{cx}{b}$ ex $a+c$, relinquetur IB, $a+c-\frac{cx}{b}$. E qua si auferatur BC seu y, remanebit IC, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Quia verò in Hyperbola rectangulum ICB æquatur rectangulo DEA, per 10 prop. 2^di libri Conicorum Apollonii; ideo si multiplicetur IC per CB, hoc est, $a+c-\frac{cx}{b}-y$ per y, fiet rectangulum ICB, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$, æquale rectangulo DEA seu ac, hoc est, ei quod fit ex ductu ipsius DE seu GA in EA. Quare ordinatâ æquatione, factaque transpositione, ut yy unam obtineat æquationis partem, invenietur $yy \infty cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$. Quæ æquatio eadem est, quæ supra ex motu regulæ GL & rectæ lineæ CK fuit inventa. Adeò ut affirmare liceat, descriptam lineam curvam CE Hyperbolam esse, cujus Asymptoti AF, FD; quemadmodum supposuimus. Quorum pleniorem demonstrationem qui desiderat, consulat caput 6^tum tractatus nostri de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione, ubi casus omnes prosecuti sumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema simile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri AB regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula BD, in puncto B, ut similiter circa punctum B in eodem plano moveri possit. Assumpto autem in BD inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam AD; Quæritur cujus generis sit curva linea, quam punctum E motu illo describit?

Quoniam igitur ad hanc quæstionem oportet cognoscere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ AD, in qua punctum A est datum: suppono ex puncto E, ad quod

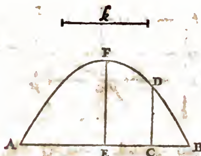
quod instrumentum huic curvæ describendæ inserviens est adplicatum, demissam esse super A D perpendicularem E N. Et quidem cum E N, N A duæ sint quantitates indeterminatæ ac incognitæ; voco unam x, & alteram y. Deinde, ut relationem unius ad alteram investigem, considero etiam quantitates cognitas A B vel B D, & D E, quæ hujus curvæ descriptionem determinant; illamque appello a; hanc verò b. Tum quia triangulum N E D est rectangulum, à quadrato ex D E, hoc est bb, aufero quadratum ex N E, hoc est, xx, & relinquitur quadratum ex N D, seu $bb-xx$, cujus radix $\sqrt{bb-xx}$ est ipsa linea N D. Porrò demissâ ex B super A D perpendiculari B q, secabitur recta A D ab ipsa bifariam in q, propter æqualitatem regularum A B & B D, fientque triangula B q D & E N D similia. Vnde erit ut D E ad D N, hoc est, b ad $\sqrt{bb-xx}$; ita D B, hoc est, a, ad D q, seu $\frac{a}{b}\sqrt{bb-xx}$. & fit A D ∞ $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$. Cæterùm cum A N sit $\infty\, y$, & N D $\infty \sqrt{bb-xx}$, erit tota A D $\infty\, y+\sqrt{bb-xx}$. Adeò ut habeatur æquatio inter A D bis inventam, hoc est, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $y+\sqrt{bb-xx}$, vel, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ $-\sqrt{bb-xx}$ seu $\frac{2a-b}{b}\sqrt{bb-xx}$ & y. Et multiplicatâ utrâque æqualitatis parte in se, ut signa radicalia evanescant, & æquatio ab asymmetria liberetur, fit $4aa-4ab+bb-\frac{4aaxx}{bb}+\frac{4axx}{b}$ $-xx \infty\, yy$. Quæ æquatio si per transpositionem ac divisionem ordi-

ordinetur, ita ut xx unam teneat æquationis partem (si sit x quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam), invenietur $xx \propto \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, vel $xx \propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$.
Vnde cum æquatio non ascendat ultra quadratum unius ex quantitatibus indeterminatis, quemadmodum & superiùs in Hyperbola evenit: constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quæ alia non est quàm Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite tractatus nostri de Organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus. Vbi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. I. suæ Gnom. affert prop. 26ᵃ) describendi Ellipsin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi potest, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris est, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus usum habet insignem. Nam si productâ A B ad I, ut B I sit æqualis B E, centro A intervallo A I circulus describatur, secans A D, hinc inde productam, in L & K: erit L K axis transversus Ellipsis. Rectus autem invenitur, si ex eodem centro, intervallo D E, circulus describatur p G F g, secans A I in F. Erit enim A G semissis axis recti. Et si à puncto F ipsi A D ducatur F E parallela, secans I N in E: erit punctum E unum ex punctis, per quod Ellipsis transire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifestum: Est enim A I $2a - b$, & A N y; estque ut A I seu $2a - b$ ad A N seu y, ita A F seu b ad A n, quæ ideo est $\frac{by}{2a - b}$. Cujus quadratum $\frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$ si auferatur à quadrato ex A F seu bb, remanebit quadratum ex n F $\propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, utpote æquale xx quadrato lineæ N E. Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæstione sequenti, quæ ultima est propositio lib. 4ⁱ collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

Quæritur cujus generis sit curva linea A F D B, cujus hæc est proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut D, perpendiculari D C, in rectam A B, positione & magnitudine datam, id quod sub perpendiculari D C & alia quadam data linea k continetur, æquale sit rectangulo, quod sub segmentis A C, C B comprehenditur.

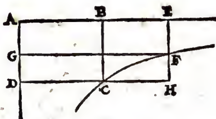
Sectâ



Sectâ A B bifariam in E, pono A E vel E B $\infty\ a$, E C $\infty\ y$, C D $\infty\ x$: eritque A C $\infty\ a+y$, & C B $\infty\ a-y$. Cum igitur ejusmodi sit relatio punctorum curvæ A D B ad puncta rectæ A B, ut rectangulum sub C D & k æquetur rectangulo sub A C, C B: erit $aa-yy \infty kx$. Quæ æquatio ad omnia utriusque lineæ puncta referri potest, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ existunt, quæ ad omnes lineas E C, C D applicari possunt. Exceptis punctis F & E, quo casu quantitas y nulla est, & E F æquatur $\frac{aa}{k}$. quod & de duobus præcedentibus Problematis est intelligendum. Cæterùm cum in æquatione inventa $aa-yy \infty kx$ una quantitatum incognitarum y adscendat ad quadratum, indicio est, lineam curvam esse primi generis. Quam aliam non esse, quàm Parabolam, demonstravit Pappus loco citato.

Non àliter concludes, æquatione existente $xy \infty ab$, vel $xy \infty by-ax$, lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, esse primi generis: cum tantùm ascendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Est autem curva illa linea Hyperbola. Quod facilè intelligetur, si in prima æquatione, ubi $xy \infty ab$, concipiamus ab constituere rectangulum aliquod parallelogrammum A B C D, cujus unum latus A B sit a, & alterum B C sit b; atque per punctum C circa Asymptotos D A, A B Hyperbolen describamus C F; ac denique à quovis in

ea



ea puncto F agamus duas rectas lineas F G, F E, ipsis A B, B C parallelas: Erit enim parallelogrammum A E F G parallelogrammo A B C D æquale, per 12 prop. 2^{di} libri Conicorum Apollonii. Adeò ut A E & E F sumi possint pro duabus quantitatibus indeterminatis y & x, quæ in se invicem ductæ efficiant $xy \infty ab$. quod exigebat proposita æquatio.

Eodem modo, si æquatio fuerit $xy \infty by - ax$, & producantur rectæ D C, E F, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum D H F G parallelogrammo C H E B æquale. Ac proinde si D C ponatur ∞a, & C B ∞b, (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ y & x ad binas lineas C H & H F referantur, atque D H seu $a + y$ ducatur in H F seu x: erit rectangulum D F seu $xy + ax$ æquale rectangulo C E seu by, utpote quod invenitur multiplicando C B seu b per C H seu y. Adeoque si utrinque auferatur ax, relinquetur $xy \infty by - ax$. Quæ est æquatio posterior.

E quibus manifestum fit, quòd, licèt plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis sumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, semper tamen linea ejusdem generis appareat, quocunque tandem modo sumantur.

Omitto alios æquationum modos seu formulas, eandem curvam designantes, quandoquidem complures sunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantùm ex varia harum curvarum ad diversas rectas lineas relatione. Nam, ut ostendatur quænam differentia obtineri possit, cùm curva linea ad diversas rectas lineas refertur: Sunto duæ rectæ lineæ positione datæ A B, D F, sibi mutuò occurrentes in D; punctum autem

tem

tem in curva sit C. Et in A B quidem puncto A existente dato, & in ipsam à puncto C demissâ perpendiculari C B, ad referendum punctum C ad aliquod punctum ipsius A B: voco A B, x; & B C, y. Deinde, quoniam, propter positione datas A B, D F, datum est punctum intersectionis D, data quoque erit recta D A, nec non A F, quæ ipsi A B est perpendicularis, secans D H in F. Denique, demissâ ex puncto C super D H perpendiculari C G, producatur C B, donec occurrat rectæ D F in puncto H. Quibus positis, ut inveniantur rectæ D G, G C, ostendentes relationem, quam habet punctum C ad punctum G; ponatur D A $\infty\ a$, A F $\infty\ b$. Hinc, cum A B sit $\infty\ x$, erit D B $\infty\ a+x$. Iam verò quia propter similitudinem triangulorum D A F, D B H, D A est ad A F, hoc est, a ad b, sicut D B, hoc est, $a+x$, ad B H, erit B H $\infty\ \frac{ab+bx}{a}$. Cui si addatur C B $\infty\ y$, fiet tota C H $\infty\ y+b+\frac{bx}{a}$. Porrò quoniam rectangulum est triangulum D A F, erit quadratum ex D F æquale quadratis ex D A & A F; ideoque D F $\infty\ \sqrt{aa+bb}$. Hinc cum D A sit ad D F, hoc est, a ad $\sqrt{aa+bb}$, sicut D B, hoc est, $a+x$, ad D H; erit ipsa $\infty\ \frac{a+x}{a}\sqrt{aa+bb}$ seu $\sqrt{aa+bb}+\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$. similiter, ob similitudinem triangulorum F A D, H G C, cum sit ut D F ad F A, hoc est, $\sqrt{aa+bb}$, ad b, ita C H, hoc est, $y+b+\frac{bx}{a}$ ad H G; erit H G $\infty\ \frac{aby+abb+bbx}{a\sqrt{aa+bb}}$. Quæ si subtrahatur ex D H $\infty\ \sqrt{aa+bb}+\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$, relinquetur D G $\infty\ \frac{a^3+aax-aby}{a\sqrt{aa+bb}}$ seu $\frac{aa+ax-by}{\sqrt{aa+bb}}$. Denique quoniam D F est ad D A, hoc est, $\sqrt{aa+bb}$ ad a, sicut C H, hoc est,

$y+b+\frac{bx}{a}$ ad CG; erit CG ∞ $\frac{ab+bx+ay}{\sqrt{aa+bb}}$. E quibus perſpicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ A B, tum ad puncta rectæ D F, obtineri poteſt, in eo tantùm conſiſtere, quòd, cùm A B indeterminata relinquitur, C B exprimatur per y; ſed C G per $\frac{ab+bx+ay}{\sqrt{aa+bb}}$, & D G per $\frac{aa+ax-by}{\sqrt{aa+bb}}$. Ita ut ſi y ſpeciem induat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; conſtabit ſimul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriuſque rectæ A B, D F. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum poſitione oſtendi poſſet, niſi breviores eſſe vellemus.

B *Saltem ſi ſupponamus quantitatem e z majorem quàm c g. nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna +* & —.] Exiſtente enim ez minore quàm cg, & multiplicando utrobique per z^2, foret ez^3 minor quàm cgz^2. Quo caſu omnes quoque numeratoris termini, qui ſigno + adficiuntur, minores erunt illis, qui ſigno — adficiuntur; adeò ut tantùm mutanda ſint omnia ſigna. Æquationem autem hoc facto illæſam manere, ita oſtenditur. Eſto $y \infty \frac{fe-dk}{d-e}$ (ſufficit enim id per facile aliquod exemplum oſtendere), ſuppoſitaque d minori quàm e, mutentur omnia ſigna + & —: fietque $y \infty \frac{-fe+dk}{-d+e}$.

Quoniam enim ex hypotheſi $y \infty \frac{fe-dk}{d-e}$, erit, multiplicando utrinque per $d-e$, $dy-ey \infty fe-dk$. Vnde factâ tranſpoſitione, ut totum æquetur nihilo, erit $dy-ey-fe+dk \infty 0$. Transferantur rurſus $+dy-ey$ in alteram æquationis partem, & fiet $-fe+dk \infty -dy+ey$. Quæ æquatio à præcedenti non differt, niſi quòd termini omnes contrariis ſignis ſint adfecti. Quare ſi utraque æqualitatis pars dividatur per $-d+e$, prodibit $y \infty \frac{-fe+dk}{-d+e}$. ut erat propoſitum.

Vnde colligere licet: Si quantitates quædam ſignis + & — junctæ æquentur aliis quibuſdam quantitatibus etiam ſignis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis ſignis affectæ inter ſe æquales.

Vnde

Vnde si in hac æquatione quantitas y nulla sit, aut minor quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo DAG, oporteret & illud supponere in angulo DAE, aut EAR, aut RAG, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiretur, indicio esset, quæstionem casu proposito esse impossibilem.] Sciendum hic ab Autore obiter notari, ad plenam compositionem loci, in quem cadit quæsitum punctum C, opùs esse ut investigemus id ipsum in omnibus 4^{or} angulis D A G, D A E, E A R, & R A G, quærendo nempe ad hoc 4^{or} æquationes diversas. Id quod notat facile esse, unâ æquatione jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mutare oportet signa + & —, pro diversa habitudine quantitatum inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra angulum D A E, aut E A R, aut R A G quæratur eâdem ratione, quâ illud hîc invenire docuit, cùm intra angulum D A G cadere supponitur. Manifestum enim est, quòd, si in 4^{or} hisce positionibus valor ipsius *y* nullus reperiatur, quæstio proposita futura sit impossibilis. Quod ipsum hîc in genere de puncto C intelligi debet, etiamsi quæstio alias conditiones præsupponat: cum illa vix alioquin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) istius momenti visa sit, ut in constructione hujus loci totus esset, nisi quatenus hîc unà simul compositionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, sicut ipsius verba indicant p. 12 & 34. Quippe aliàs in hac positione datarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum sub C B, C F ponitur æquale rectangulo sub C D, C H, ut punctum C non tantùm ubivis cadat in Circulum, qui transit per puncta A, G, & duas intersectiones linearum F E, G H, & ipsarum D A, F E; verùm etiam in utramque duarum oppositarum Hyperbolarum, quarum una transit per A & G puncta, & altera per duas reliquas intersectiones dictas. Quemadmodum etiam, si duæ ex datis lineis sunt parallelæ, fieri potest, ut punctum C ubilibet cadat in duas oppositas Hyperbolas & insuper in Parabolam vel in duas alias oppositas Hyperbolas; aut etiam in duas oppositas Hyperbolas & in rectam lineam, ubi videlicet bina sunt parallelarum paria sese intersecantia. atque ita de aliis. Idem observare licet

BB

Vide fig. pag. 12.

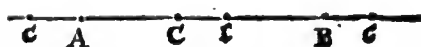
in Apollonii Locis Planis, à me restitutis, in quorum nonnullis, ad plenam loci compositionem, quæsitum punctum præter lineas jam expressas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate investigari & construi possunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantùm angulis suppositum fuerit, quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His similia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non nisi certus est punctorum numerus. Cujusmodi est sequens

Problema.

In recta interminata assignatis duobus punctis A, B, in eadem aliud assignare punctum C, ut rectangulum ACB, quod sit sub rectis AC, CB, ad assignata puncta A, B abscissis, dato spatio d æquale sit, quod tamen minus sit quartâ parte quadrati ex AB, quæ sit $\infty\ a$.





Quoniam hîc juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum est respectu puncti A, ut & respectu puncti B, hoc est, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad sinistram utriusque cadat, hinc si concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, si ei soli acquiescere velimus. Quocirca & illud ipsum extra A & B ab utraque parte supponendum est, si velimus ut solutio Problematis omnibus numeris sit absoluta.

Vnde supponendo C primùm cadere extra AB ad sinistram ipsius A, erit, assumptâ x pro Ac, $xx + ax \infty d$; ac deinde supponendo C cadere inter A & B, erit $ax - xx \infty d$; & denique supponendo c cadere extra AB ad dextram ipsius B, erit $xx - ax \infty d$. Hoc est in numeris, si a sit $\infty\ 20$, $d \infty 96$, habebitur $x \infty 4$, $x \infty -24$; $x \infty 12$; $x \infty 8$; $x \infty 24$, & $x \infty -4$. Quæ quidem omnes sunt radices, quæ ad propositum Problema pertinent. Quarum prima & ultima designant longitudinem lineæ Ac $\infty\ x$, qualis

qualis ipsa sumenda est ab A versùs sinistram, & quatuor reliquæ, qualis ipsa sumi debet ab A versùs dextram, cadente puncto C inter A & B, vel ultra B; adeò ut in toto sint 4^{or} diversa puncta, quæ quæsito satisfaciant.

Cæterùm si velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ hasce omnes radices simul includat, oportet tantùm, ubicunque accepto puncto C, factâque A c $\infty\, x$, multiplicare $xx + 20x - 96 \infty 0$ per $20x - xx - 96 \infty 0$, & id quod fit rursus per $xx - 20x - 96 \infty 0$, & invenietur $- x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840x^3 + 47616xx + 184320x - 884736 \infty 0$ seu $x^6 - 20x^5 - 496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 884736 \infty 0$.

Id quod etiam universaliùs fieri potest multiplicando C B $\infty \pm 20 \pm x$ per A C $\infty\, x$, obtinebitur enim $\pm 20x \pm xx \infty 96$. Quæ æquatio præter radices superiores etiam continet $x \infty -8$, & $x \infty -12$, quippe quæ eliciuntur ex æquatione $-xx - 20x \infty 96$.

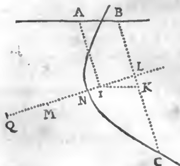
Vbi demum notandum, ex æquatione inventa $\pm 20x \pm xx \infty 96$ facile quoque esse aliam vulgari modo affectam invenire, quæ omnes easdem radices cum illa comprehendat, utpote multiplicando utramque partem in se quadratè, & fit $400xx \pm 40x^3 + x^4 \infty 9216$. Vnde servatâ $\pm 40x^3$ ab una parte, & deinde utrâque rursus quadratâ, invenitur æquatio $x^8 - 800x^6 + 141568x^4 - 7372800xx + 84934656 \infty 0$, cujus radices eædem sunt quæ præcedentis æquationis $\pm 20x \pm xx \infty 96$, quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujusmodi æquationibus ad solutionem quæstionis ex Pappo allatæ non fuerit usus, vel ea videtur, quòd alias tum vulgares, tum etiam à quolibet faciliùs perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæstio per se satis difficilis existit, præstare judicaverit, specialem æquationem pro C puncto investigare, postquam illud in angulo D A G supponitur, ulteriùsque tantùm digito indicare, si Problemati penitus satisfaciendum sit, eodem modo in reliquis angulis D A E, E A R, & R A G esse procedendum; quàm æquationem universalem, quæ omnia simul puncta respiceret, invenire.

Hinc nihil mihi ampliùs restare video pro linea L C præter hosce terminos: $LC \infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

 Vnde

Vnde cognoscitur, quòd si nulli fuissent, futurum fuisse ut punctum C reperiretur in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo + notatis, oo fuisset æqualis $4pm$, sive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm I L.] Hæc verba tres conditiones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit. Nam cum facienda sit L C $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{pxx}{m}}$, reperietur illud punctum in linea recta I L, si termini, quibus ipsa exprimitur, nulli sint. Et si tales fuerint, ut radix ex iis extrahi possit, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo + notatis, oo sit æqualis $4pm$, hoc est, ut L C sit $\sqrt{mm + \frac{pxx}{m} \; 8 \; x\sqrt{4pm}}$ seu $m \; 8 \; x\sqrt{\frac{p}{m}}$: punctum C similiter in recta linea reperietur. Idem continget, si termini mm & ox, aut ox & $\frac{pxx}{m}$ fuerint nulli, dummodo reliquus $\frac{pxx}{m}$, aut mm semper signo + adfectus sit.

CC *Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus, &c.*] Quò ista, quæ hîc deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifestiora fiant, sequentia in medium afferre visum fuit.



Primus casus, cùm Sectio est Parabola, in quâ linea L C una ex iis existit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ semper in lineam I L cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L sumendus est respectu puncti I, linea L C existente $\infty \sqrt{mm + ox}$. Ad quem inveniendum, si, ut & latus rectum

ctum r, pono pro NI f, eritque NL $\propto f + \frac{ax}{z}$,

deinde ita procedo:

Mult. NL. $f + \frac{ax}{z}$

per r

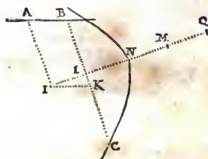
fit □ LC. $fr + \frac{arx}{z}$, æquale $mm + ox$.

$$\frac{ar}{z} \propto o \qquad\qquad fr \propto mm, \text{ dele } r$$

$$ar \propto oz \qquad\qquad \frac{foz}{a} \propto mm$$

$$r \propto \frac{oz}{a} \qquad\qquad foz \propto amm$$

$$f \propto \frac{amm}{oz}$$



2^{dus} casus, ubi vertex N in linea IL ex eadem parte puncti L sumendus est respectu puncti I, linea LC existente $\propto \sqrt{mm - ox}$.

Quod sic liquet

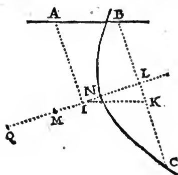
Mult. LN. $f - \frac{ax}{z}$

per r

fit □ LC. $fr - \frac{arx}{z}$ æquale $mm - ox$.

Et fit, ut ante, $r \propto \frac{oz}{a}$, & $f \propto \frac{amm}{oz}$.

3^{tius} ca-



3^{tius} casus, ubi vertex N in linea I L sumi debet inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm+ox}$.

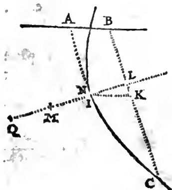
Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z} - f$

per $\overline{\qquad r}$

fit □ L C. $\frac{arx}{z} - fr$, æquale $-mm+ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.



4^{tus} casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm nulla est, lineâ L C existente ∞ $\sqrt{ox}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

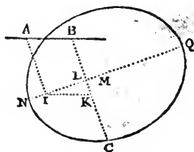
per $\overline{\qquad r}$

fit □ L C. $\frac{arx}{z}$, æquale ox.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$.

E quibus colligitur, cum in omnibus hisce Parabolæ casibus sive diversis ejus positionibus latus rectum sit $\infty \frac{oz}{a}$, atque in iis nullibi reperiatur quantitas in xx ducta, nec præter easdem ulla alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur, quæsitum punctum C cadere in Parabolam, cujus latus rectum est $\frac{oz}{a}$, quæque pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, positiones jam explicatas admittat.

Pri-



Primus casus, cùm linea est Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m} xx}$.

Ad quod inveniendum, ut & diametrum N Q, pono pro N M vel M Q c, & pro I M d; eritque N L $\infty\ c - d + \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty\ c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

Mult. N L. $c - d + \frac{ax}{z}$

per L Q. $c + d - \frac{ax}{z}$

$$cc - cd + \frac{acx}{z}$$

$$+ cd - dd + \frac{adx}{z}$$

$$- \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

fit $\square$ N L Q seu $\square$ L C. $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm + ox - \frac{p}{m} xx$.

Intellige hîc c majorem esse quàm d.

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$ $\qquad$ $\frac{2ad}{z} \infty\ o$

$aam \infty pzz$ $\qquad$ $2ad \infty oz$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$. Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc - dd \infty mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa} + mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4aamm}{aa}$, dele aam.

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

2dus casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m} xx}$.

Quod sic liquet:

Mult. QL. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - d - \frac{ax}{z}$

$cc + cd + \frac{acx}{z}$

$- cd - dd - \frac{adx}{z}$

$- \frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

fit □ QLN seu □LC. $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$ æquale $mm - ox - \frac{p}{m} xx$.

Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et sit, ut ante, $aam \infty pzz$, $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, &

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

3[tius] casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas $o\,x$ nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $2c \infty 2m$ vel $\frac{2pzz}{aa}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod sic liquet

Mult. QL. $c + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - \frac{ax}{z}$

$$cc + \frac{acx}{z}$$

$$- \frac{acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

& fit ▭QLN seu □LC. $cc - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d esse ∞ o.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$$

$$aam \infty pzz$$

$$m \infty \frac{pzz}{aa}, \text{ \& } mm \infty \frac{ppz^4}{a^4} \infty cc$$

$$\frac{4ppz^4}{a^4} \infty 4cc$$

$$2c \infty r \infty \frac{2pzz}{aa} \text{ vel } 2m.$$

Nota hîc in tribus allatis casibus, in quibus c major intelligitur quàm d, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+ mm$.

4^{tus} casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm quantitas $o\,o$ est major quàm $4\,mp$, lineâ L C existente ∞ $\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$

Quod sic liquet

$$\begin{array}{rl} \text{Mult. NL.} & c - d + \frac{ax}{z} \\ \text{per LQ.} & c + d - \frac{ax}{z} \\ \hline & cc - cd + \frac{acx}{z} \\ & \quad + cd - dd + \frac{adx}{z} \\ & \quad\quad - \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz} \\ \hline \end{array}$$

fit ▭ NLQ seu □LC. $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale

$$-mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c minorem quàm d.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m} \qquad \frac{2ad}{z} \infty o$$

$$aam \infty pzz \qquad 2ad \infty oz,$$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$.

Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

cc —

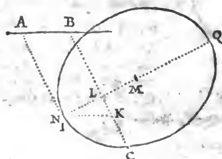
$cc - dd \infty - mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa} - mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



5[tus] caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \frac{oz}{a}$.

Quod ſic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

per L Q. $2c - \frac{ax}{z}$.

fit ▭ N L Q ſeu □ L C. $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d eſſe æquales.

$\frac{2ac}{z} \infty o$

$2ac \infty oz$

$2c \infty r \infty \frac{oz}{a}$

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

$aam \infty pzz$

Hinc cùm in omnibus hiſce Circuli caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno — adfecta reperiatur, ut & quantitas $aam \infty pzz$; nec præter poſitiones haſce ulla alia

la alia excogitari poſſit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur: ſequitur, ſi in quæſtione terminus $\frac{p}{m}xx$ ſigno — fuerit adfectus, & quantitas $aam \infty pzz$, angulo I L C exiſtente recto, lineam, in quam punctum quæſitum C cadit, fore Circulum, quemadmodum eſt oſtenſum.

Primus caſus, cùm linea eſt Ellipſis, & centrum ejus M in linea I L ſumendum eſt ex eadem parte puncti L reſpectu puncti I, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, ſicut & latus rectum r, & tranſverſum N Q, pono, ut ante in Circulo, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque N L $\infty\ c - d + \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty\ c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

lat. tranſv. lat. rect. ▭ N L Q

$$2c \text{———} r \text{———} cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}, \text{ ad}$$

□ L C

$$\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc c majorem eſſe quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \infty\ o$$

$$adr \infty coz$$

$$\frac{adr}{oz} \infty\ c, \ \& \ \frac{aaddrr}{oozz} \infty\ cc$$

$$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$,

$$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$$ ita pzz ad aam

$$aom \infty 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \infty\ d$$

ccr—

$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty mm$

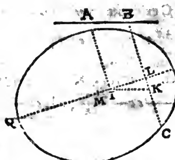
$ccr - ddr \infty 2cmm$, dele c & cc

$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty \frac{2admmr}{oz}$

$aadrr \infty doozz + 2ammoz$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



2dus casus, ubi centrum M in linea IL ex altera parte est sumendum puncti L respectu puncti I, lineâ LC existente $\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

lat. transv. — lat. rect. — □ QLN

$2c$ ——— r ——— $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$,

□ LC

ad $\frac{ccr - ddr - \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

3tius

3[tius] casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ LC existente $\propto \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $r \propto \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ seu $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. □QKN □LC

$2c$ —— r —— $cc - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{ccr - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d esse $\propto o$

$\frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$

$aamr \propto 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$c \propto \frac{aamr}{2pzz}$

$\frac{cr}{2} \propto mm$

$cr \propto 2mm$, dele c

$\frac{aamrr}{2pzz} \propto 2mm$

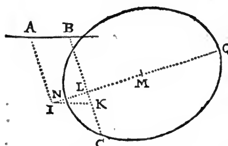
$aarr \propto 4mpzz$

$rr \propto \frac{4mpzz}{aa}$

$r \propto \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi

Ubi notandum, in allatis tribus casibus, sicut in Circulo, propter c ipsâ d majorem, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+mm$.



4[tus] casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm oo est major quàm $4mp$. lineâ L C existente ∞ $\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}-\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭NLQ

$2c$ —— r —— $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, ad

□LC

$\frac{ccr-ddr+\frac{2adrx}{z}-\frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm+ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c minorem quàm d.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$ $\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$,

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$ ita pzz ad aam.

$aom \infty 2dpz$

$d \infty \frac{aom}{2pz}$

$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty - mm$

$ccr - ddr \infty - 2cmm$, dele c & cc

$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty - \frac{2admmr}{oz}$

$aadrr \infty doozz - 2ammoz$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{\ }$

$x \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi etiam liquet, ut punctum C cadat in Ellipsin, quemadmodum hîc supposuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$.

5^tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭ NLQ □ LC

$2c$ —— x —— $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{\frac{2acrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ax - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d æquales.

$\frac{ar}{z} \infty o$

$ar \infty oz$

$r \infty \frac{oz}{a}$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam. Vnde ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\frac{oz}{a}$, ad $\frac{aom}{pz}$.

Quo-

Quocirca cum in omnibus hisce Ellipseos casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, & ratio recti lateris ad transversum sit, ut pzz ad aam; nec præter allatas positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — denotatus fuerit, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Ellipsin, cujus rectum latus ad transversum sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, cujusmodi jam est ostensum, existat.

Primus casus, cùm sectio est Hyperbola, in quâ linea L C est una ex iis, quæ ad diametrum, quæ est in linea I L, ordinatim adplicantur, & ubi centrum M in linea I M ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo & Ellipsi, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque N L $\infty\ d - c - \frac{ax}{z}$, & L Q ∞ $d + c - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

Mult. NL. $d - c - \frac{ax}{z}$

per LQ. $d + c - \frac{ax}{z}$

$$dd - cd - \frac{adx}{z}$$
$$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$$
$$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— □ NLQ. $dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ LC. $\frac{ddr - ccr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d majorem esse quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty mm$

$ddr - ccr \infty 2cmm$, dele c & cc

$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty \frac{2admmr}{oz}$

$doozz - aadrr \infty 2ammoz$

$doozz - 2ammoz \infty aadrr$

$\frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Vbi

Vbi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.

2^{dus} caſus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm oo eſt major quàm $4mp$, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

$$\text{Mult. QL.}\quad c + d + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per LN.}\; -c + d + \frac{ax}{z}$$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$

$$+cd + dd + \frac{adx}{z}$$

$$+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{——} r \text{——} \square\,\text{QLN}.\; dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad } \square\,\text{LC}.\; \frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{æquale}$$

$$mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

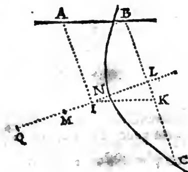
Simi-

Similiter hîc d majorem intellige quàm e.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \;\&\; 2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Vbi etiam liquet, ût punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppo*s*uimus, quantitatem oo & hoc casu majorem requiri quàm $4mp$.



3[tius] casus, ubi vertex N sumendus est inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

Mult. Q L. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $-c + d + \frac{ax}{z}$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$
$$+cd + dd + \frac{adx}{z}$$
$$+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— $\square$ QLN. $dd - cc + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

ad $\square$ L C. $\frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$$-mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

In-

Intelligé hîc *d* minorem esse quàm *c*.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty ooz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele *c*, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut *r* ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty - mm$

$ddr - ccr \infty - 2cmm$, dele, *c* & *cc*

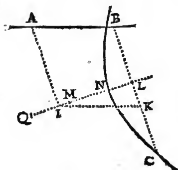
$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty - \frac{2admmr}{oz}$.

$doozz + 2ammoz \infty aadrr$

dele *d*, & extr. $\surd$. $\frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$

$\surd \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum fiat ut pzz ad aam, ita

$\surd \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$, ad $\surd \frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}$.



4us casus, ubi centrum M & vertex N sumi debent inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \surd - mm - ox + \frac{p}{m} xx$.

Quod

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.}\quad c - d + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.}\quad -c - d + \frac{ax}{z}$$
$$-cc + cd - \frac{acx}{z}$$
$$-cd + dd - \frac{adx}{z}$$
$$+\frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{———} r \text{———} \square \text{QLN.} -cc + dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad} \square \text{LC.} \frac{-ccr + ddr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{æquale}$$
$$-mm - ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc similiter d minorem quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{a}}, \&\ 2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

5[tus] casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC existente

$$\infty \sqrt{ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.}\quad 2c + \frac{ax}{z}$$
$$\text{per LN.}\quad \frac{ax}{z}$$

lat. transv. lat. rect.

$$2c \text{———} r \text{———} \square \text{QLN.}\ \frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

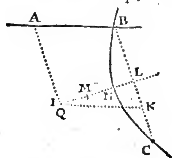
$$\text{ad} \square \text{LC.} \frac{\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{æquale } ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

Intellige hîc c & d esse æquales.

Et fit, ut ante in Ellipsi, r ad $2c$, ut pzz ad aam,

$d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}, r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$



6^tus casus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{-ox+\frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. Q L. $\frac{ax}{z}$

per L N. $-2c+\frac{ax}{z}$

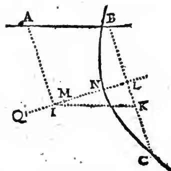
lat. transv. lat. rect.

$2c$ ——— r ——— □ Q L N. $-\frac{2acx}{z}+\frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\frac{-\frac{2acrx}{z}+\frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-ox+\frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc similiter c & d esse æquales.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}, r \infty \frac{oz}{a}$,
& $2c \infty \frac{aom}{pz}$,



7^mus casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm+\frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. Q L. $c+\frac{ax}{z}$

per L N. $-c+\frac{ax}{z}$

$-cc-\frac{acx}{z}$

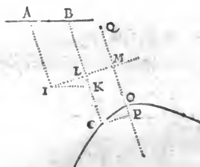
lat. tr. lat. rect. $+\frac{acx}{z}+\frac{aaxx}{zz}$

$2c$ —— r —— ☐ Q L N. $-cc+\frac{aaxx}{zz}$,

ad ☐ L C. $\frac{-ccr+\frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm+\frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc d esse ∞ o.

Unde, ut ante in Ellipsi, invenitur, r esse ad $2c$, sicut pzz ad aam, & r ∞ $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, at verò $2c$ ∞ $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.



8^{vus} casus, ubi linea L C est parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea I L, ordinatim adplicatur, & ubi centrum M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente ∞ $\sqrt{mm-ox+\frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum R pertinens ad diametrum O P, & latus transversum O Q, pono, ut ante, pro I M d, & pro O M vel M Q e.

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. L M vel C P. $d - \frac{ax}{z}$

per C P. $d - \frac{ax}{z}$

$dd - \frac{adx}{z}$

$- \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. rect. lat. transv.

R ——— $2e$ ——— ☐ C P. $dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad ▭ Q P O. $\frac{2dde - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. ☐ M O. ee

fit ☐ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

$\frac{4ade}{Rz} \infty o$

$4ade \infty oRz$

$e \infty \frac{oRz}{4ad}$

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$\frac{aomRz}{2d} \infty pRzz$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{2dde + eeR}{R} \infty mm$

$2dde + eeR \infty mmR$, dele e

$\frac{aozR}{2a} + eeR \infty mmR$

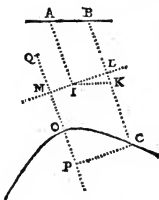
$\frac{oom}{4p} + ee \infty mm$

$ee \infty mm - \frac{oom}{4p}$

$e \infty \sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$, & $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$.

Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, ad $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppofuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in primo casu.



9[nus] casus, ubi centrum M in linea I L sumendum est ex altera parte puncti L respectu puncti I, cùm oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. M L vel P C. $d + \frac{ax}{z}$

per P C. $d + \frac{ax}{z}$

$dd + \frac{adx}{z}$

$+ \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2e$ —— □ P C. $dd + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

□ Q P O

ad $\frac{2dde + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

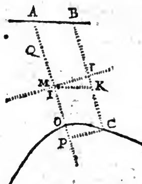
fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

Et fit, ut ante, $2e$ ad R, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, & $R \infty \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppoſuimus, quantitatem oo & hoc casu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in 2[do] casu.



10[mus] casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas oo nulla eſt, lineâ L exiſtente $\infty \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $2e \infty 2m$, & $R \infty \frac{2aamm}{pzz}$, & ratio $2e$ ad R, ut pzz ad aam.

Quod ſic liquet

Mult. M L vel P C. $\frac{ax}{z}$

per P C. $\frac{ax}{z}$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— □ P C. $\frac{aaxx}{zz}$, ad ▭ Q P O. $\frac{2aaexx}{Rzz}$

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $ee + \frac{2aaexx}{Rzz}$,

$ee \infty mm$

$e \infty m$, & $2e \infty 2m$

æquale $mm + \frac{p}{m}xx$.

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$2aamm \infty pRzz$

$\frac{2aam}{pzz} \infty R$

 Hinc

Hinc cum in omnibus hisce Hyperbolæ casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo + adfecta reperiatur, & in prioribus septem latus rectum ad transversum sit, ut pzz ad aam, at in tribus posterioribus ut aam ad pzz; nec præter has positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo + denotatus fuerit, punctum quæsitum C cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad transversum sive etiam transversum ad rectum, pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, qualis jam ostensa fuit, existat.

Ubi denique notandum, quòd, sicut punctum C in Hyperbolam cadere ostensum est, cujus vertex N vel O, id ipsum similiter in Hyperbola opposita pro libitu assumi possit, cujus vertex est Q, non autem indifferenter in 4^or^ ejusmodi sectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, simul.

CCC *Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema* I. *primi libri Conicorum Apollonii.*] Quò illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis scripserunt, non sunt ad manus, hac in parte satisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, exciderant, simili occasione ipse investiganda proposui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo se oblectare cupientibus, ut proprio marte propositiones invenire addiscant, inservire potest, prout iis, hisce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & investigandas instigentur, præïvero; ne ad universalem Matheseos complexionem plura librorum volumina evolvere & propositiones in iis singulas excutere (quod plerisque summus est scopus) opus habeant; quin potiùs quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant, novasque alias innumeras, quibus scientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

Verùm enimvero ut non solùm pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio ostensa citavit, juxta Geometriæ suæ methodum inveniri possint; sed etiam illa, quæ ex ipso p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod sciam, ea sunt, quæ ab eo ad Geometriam suam ex Apollonio præsupponuntur): non abs re

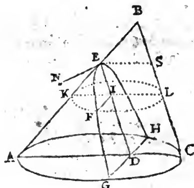
re fuerit illa præsenti commentario simul comprehendere atque ad Autoris mentem sic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARUM SECTIONUM PROPRIETATIBUS.

Suppositiones.

1. Rectam lineam B A vel B C, quæ à vertice coni B ducitur ad basis A C circumferentiam, esse in superficie conica.

2. Sectionem K F L, basi coni A C parallelam, esse circulum.



De *PARABOLA*, quæ est sectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E D, communis sectio trianguli per axem A B C & plani secantis G F E H, quæ & sectionis diameter dici consuevit, parallela est uni laterum A B, B C ejusdem trianguli, ut hîc ipsi B C; lineâ G H, quæ Basis Sectionis G F E H vocatur, ipsam A C, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto A B ∞ *a*
B C ∞ *b* Fiat propter similitudinem Δ^{rum} A B C & K E I
A C ∞ *c*
E B ∞ *d* ut B C ad C A, ita E I ad I K
E I ∞ *x* b —— c —— x / $\frac{cx}{b}$
F I ∞ *y* Rursus fiat propter similitudinem Δ^{rum} A B C & E B S
ut A B ad A C, ita E B ad E S seu I L } Mult.
a —— c —— d / $\frac{cd}{a}$
—— $\square$ F I
fit $\square$ K I L. $\frac{ccd}{ab}x \infty yy$.

Hinc si fiat, ut *a b* ad *c c*, hoc est, ut $\square$ A B C ad $\square$ A C, ita *d*, hoc est, E B, ad quartam, quæ sit E N: erit E N $\infty \frac{ccd}{ab}$. Quæ si brevitatis causâ nominetur *r*, habebitur *r x* ∞ *y y*. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate 11mo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodlibet, sub rectâ E N seu *r* sic inventâ, & diametri segmento E I, quod inter verticem ejus E & ordinatim adplicatam F I intercipitur, comprehensum, esse æquale quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ F I.

Ubi notandum, lineam hanc inventam E N seu *r*, ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porrò lineam breviùs obtinere licet, quàm hîc cum Apollonio ostendimus. Etenim lineâ E S existente $\infty \frac{cd}{a}$, cum B C sit ad C A, hoc est, *b* ad *c*, sicut E S, hoc est, $\frac{cd}{a}$ ad E N $\infty \frac{ccd}{ab}$: inveniri poterit E N, quærendo tantùm ipsis B C, C A, & E S quartam proportionalem. Quemadmodum ex ostensis est manifestum.

De

De *HYPERBOLA*, quæ est ſectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E R, communis ſectio trianguli per axem A B C & plani ſecantis G F E H, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum A B, B C ejuſdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hîc in D; lineâ G H, quæ baſis ſectionis G F E H vocatur, ipſam A C, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Sit A M ∞ a

M B ∞ b — Fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ C B M & L D I

M C ∞ c

D E ∞ q — ut B M ad M C, ita D I ad I L

E I ∞ x, eritque D I ∞ $q+x$ — b —— c —— $q+x$ / $\frac{cq+cx}{b}$

F I ∞ y.

Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ M B A & I E K

ut B M ad M A, ita E I ad I K

b —— a —— x / $\frac{ax}{b}$. } Mult.

fit ▭ L I K. $\frac{acqx+acxx}{bb}$ ∞ yy. □ F I

D d — Hinc

Hinc si fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □ BM ad ▭ AMC, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit EN $\infty \frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

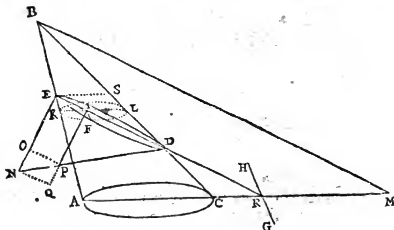
Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, EI seu NQ ad QP $\infty \frac{acx}{bb}$. Eritque rx + QP in $x \infty yy$. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ EN seu r sic inventâ, & diametri segmento EI seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehensum, unà cum rectangulo NQP, quod sub eodem diametri segmento EI vel NQ, & lineâ QP, ad quam NQ eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI esse æquale.

Ubi notandum, lineam DE ab Apollonio vocari Latus transversum Hyperbolæ, & lineam inventam EN Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ER ordinatim adplicantur. à Mydorgio verò hæc ipsa Parameter appellatur. Quæ porrò linea faciliùs obtineri potest, hoc modo; Ductâ scilicet ES ipsi AC parallelâ, ac deinde ipsis BM, MA, & SE quærendo quartam proportionalem EN. Etenim cum BM sit ad MC, hoc est, b ad c, sicut DE, hoc est, q, ad ES: erit ES $\infty \frac{cq}{b}$. Unde cum præterea BM ad MA sit, hoc est, b ad a, sicut ES, hoc est, $\frac{cq}{b}$, ad quartam $\frac{acq}{bb}$, quæ hic eadem est, quæ linea EN superiori modo inventa: manifestum est id, quod proponitur.

De *ELLIPSI*, quæ est sectio Coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH convenit cum utroque latere AB, BC ejusdem trianguli in E & D; lineâ GH, quæ basis sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, eandemve productam, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto $AM \infty a$
$MB \infty b$
$MC \infty c$
$ED \infty q$
$EI \infty x$, eritque $ID \infty q - x$
$FI \infty y$.



Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B C M & D L I
ut B M ad M C, ita D I ad I L

$$b \text{ --- } c \text{ --- } q - x \;/\; \frac{cq - cx}{b}$$

Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ A B M & K E I
ut B M ad M A, ita E I ad I K

$$b \text{ --- } a \text{ --- } x \;/\; \frac{ax}{b}$$

} Mult.

□ F I

fit ▭ K I L. $\frac{acqx - acxx}{bb} \infty yy$

Hinc si ut in Hyperbola fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □ B M ad ▭ A M C, ita q, hoc est, D E, ad quartam, quæ sit E N: erit $EN \infty \frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut D E ad E N, ita x, hoc est, I E seu P O, ad $ON \infty \frac{acx}{bb}$. Eritque $rx - NO$ in $x \infty yy$.

 Quod

Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate decimotertio primi libri Conicorum, Ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ N E seu r sic inventâ, & diametri segmento E I seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam F I interjicitur, comprehensum, minus rectangulo N O P, quod sub eodem diametri segmento E I vel O P, & lineâ N O, ad quam O P eandem rationem habet, quam D E ad E N, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ F I esse æquale.

Ubi notandum lineam E D, sectionis diametrum, ab Apollonio vocari Latus transversum ut & Diametrum transversam Ellipsis, & lineam inventam N E Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea N E Parameter appellatur. Quæ porrò linea, ut ante in Hyperbola, postquam linea E S ipsi A C ducta est parallela, breviùs obtineri potest, si tantùm ipsis B M, M A, & S E quæratur quarta proportionalis: quandoquidem hæc semper eadem existit, quæ ipsa N E, inventa, ut supra. Sicut superiùs à nobis in Hyperbola est ostensum.

Ex his porrò facilè liquet, quam inter se rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium sectionum. Etenim si in Parabolâ linea E D vocetur z, & ordinatim adplicata G D vocetur v, erit, ut supra, $\frac{ccdz}{ab} \propto vv$: ac proinde yy ad vv, hoc est, □ F I ad □ G D, ut $\frac{ccdx}{ab}$ ad $\frac{ccdz}{ab}$, seu x ad z, hoc est, E I ad E D. Hoc est, in Parabola quadrata ordinatim adplicatarum F I, G D inter se sunt, sicut lineæ E I, E D, quæ ab ipsis ex diametro E D ad verticem E abscinduntur. Quod ipsum est, quod docet Apollonius Prop^{ne} 20ma libri 1^{mi} Conicorum.

Vide figuram 1.

Eodem modo in Hyperbola & Ellipsi acceptâ pro E I aliâ magnitudine quàm ante, ut puta z, erit in Hyperbola $vv \propto \frac{acqz + aczz}{bb}$, & in Ellipsi $vv \propto \frac{acqz - aczz}{bb}$. Unde yy ad vv in Hyperbola fit, ut $\frac{acqx + acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz + aczz}{bb}$, hoc est, ut $qx + xx$ ad $qz + zz$; at in Ellipsi, ut $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ad

Vide fig. 2. & 3.

acqz—

$\frac{acqz - aczz}{bb}$, hoc est, ut $qx - xx$ ad $qz - zz$. Hoc est, in Hyperbola & Ellipsi quadrata ordinatim adplicatarum inter se sunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipsas & vertices transversi lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola □ FI $\infty \frac{acqx + acxx}{bb}$ est ad ▭ EID $\infty\, qx + xx$, ut ac ad bb; similiterque in Ellipsi □ FI $\infty \frac{acqx - acxx}{bb}$ ad ▭ EID $\infty\, qx - xx$, ut ac ad bb, hoc est, ut NE ad ED: patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum FI esse ad rectangula EID, quæ sub rectis EI, ID, inter FI & vertices transversi lateris E, D interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus NE ad transversum ED. Omnino ut habet Prop^tio 21ma libri 1^mi Conicorum Apollonii. Eadem est ratio in Circulo, qui non nisi certa Ellipsis species censenda est, quippe in qua rectum latus & transversum sunt æqualia.

Ostensis igitur quo pacto Cono dato, eoque secto, ita ut sectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipsis existat, sectionis sive figuræ hujus latera inveniri queant: restat ut è contra ostendamus, quâ viâ Conus inveniri possit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera sint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum ABC, in eoque sectionem GFEH, quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum sit $\infty \frac{oz}{a}$, facio $\frac{ccd}{ab} \infty \frac{oz}{a}$ seu $\frac{boz}{ab}$, & fit rejecto ab, communi denominatore, $ccd \infty boz$. Hoc est, diviso utrobique per cc, erit $d \infty \frac{boz}{cc}$. Hinc assumpto triangulo quolibet ABC, cujus latera sint, AB $\infty\, a$, BC $\infty\, b$, & AC $\infty\, c$, si in ipso sumatur EB $\infty \frac{boz}{cc}$, atque ex E ducatur ED ipsi BC parallela: erit AC diameter circuli sive basis Coni, & ABC triangulum per axem. Ac proinde si per D in plano basis hujus Coni ipsi AC ad rectos angulos ducatur GH, atque per rectas GH, DE sectio instituatur, faciens in superficie Conica curvam lineam GFEH: erit hæc ipsa Parabola, cujus latus rectum NE sit datæ $\frac{oz}{a}$ æqualis, quemadmodum requirebatur. Quòd si verò ipsa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ FI, quæ semper ipsi GH parallelæ intelli- Vide fig. 1.

 gun-

guntur, in dato angulo ad diametrum E D adplicentur, opus tantùm erit angulum G D E sive E D H dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum A G C H moveri circa A C, tanquam axem, eritque Problemati ex omni parte satisfactum.

Vide 2. & 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum A B C, & in eo sectionem G F E H, quæ sit vel Hyperbola vel Ellipsis, cujus latus rectum sit $\propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transversum $\propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$: facio $\frac{acq}{bb} \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $q \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Hoc est, assumptis horum quadratis, erit $\frac{aaccqq}{b^4} \propto \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. & $qq \propto \frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}$. Adeoque si in termino $\frac{aaccqq}{b^4}$ pro qq hic numerus substituatur, habebitur $\frac{a^4ccoomm + 4a^4ccm^3p}{b^4ppzz} \propto \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. Hoc est, multiplicato per crucem, erit $a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p \propto b^4oopp z^4 + 4\, b^4mp^3z^4$: & fit, si utrinque per $oopp z^4 + 4mp^3z^4$ dividatur, $\frac{a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p}{oopp z^4 + 4mp^3z^4}$ seu $\frac{a^6ccmm}{ppz^4} \propto b^4$. Unde, extrahendo utrobique radicem biquadratam, invenitur $\sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}} \propto b$. Hinc assumptis ad libitum duabus lineis A M & M C, iisque in directum seu in unam lineam positis, quarum major A M sit $\propto a$, & minor M C $\propto c$, duco ex M in angulo quocunque rectam M B $\propto \sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}}$, jungoque B A & B C; ita ut habeatur triangulum per axem A B C, cujus basis A C diametrum circuli referat, qui Coni basis existit, & punctum B verticem ipsius Coni. Deinde productâ B C, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum A B D pro utrâque figurâ aptanda erit recta E D $\propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; ita ut ipsa parallela sit lineæ B M, (quod facile est,) continuataque occurrat rectæ A M in R. Quibus sic positis, si per R in plano basis hujus Coni ipsi A M ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, R E sectio instituatur, faciens in superficie conica curvam lineam F E: erit hæc ipsa Hyperbola vel Ellipsis quæsita, hoc est, cujus rectum latus est $\propto \sqrt{\frac{oozz}{a} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transversum

sum

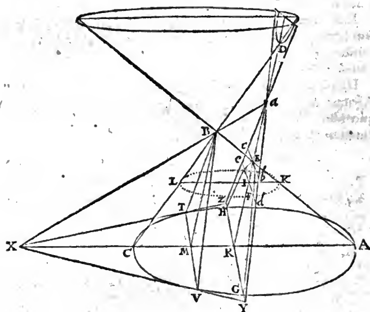
ſum $\infty \sqrt{\frac{aaeemm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Quòd ſi verò inſuper tales exhibendæ ſint, ut rectæ F I, quæ ſemper ipſi G H parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum E R adplicentur, oportet tantùm (ut ante in Parabola) angulum G R E ſive E R H dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum baſis hujus Coni eſſe mobile circa A M, tanquam axem: eruntque ſic conditiones quæſtionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, ſecundo, & tertio Problematis primi libri Conicorum Apollonii ſatisfactum putem. Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus fit manifeſta.

Eodem modo reliquos caſus Ellipſeos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & tranſverſa alias quantitates ab his diverſas ſortiuntur, qualeſque eas in antecedentibus determinare docuimus, perſequi licet.

Denique ut appareat, quâ ratione Propoſitiones de Hyperbolæ Aſymptotis agentes, de quibus Apollonius ſecundo atque ſequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonſtravit, inventæ fuerint; ſequentia protuliſſe juvabit.

Sit

Sit AM ∞ a
MB ∞ b
MC ∞ c
DE ∞ q
EI ∞ x
FI ∞ y
ER ∞ z, eritque DR ∞ $q + z$.
GR ∞ v
aE ∞ s
XM ∞ t, eritque XC ∞ $t - c$.



Mult. XA. $t + a$
per XC. $t - c$

$-tc - ac$

$tt + ta$

Ad □ XM. tt
add. ▭ CMA seu □ MV. ac

—— ▭ CXA.

per 47. 1^mi Elem. □ XV. $tt + ac \infty tt + ta - tc - ac$. per 36. 3^tii Elem.

$2ac \infty ta - tc$

XM. $\frac{2ac}{a - c} \infty t$

Fiat

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BMA & ERA
ut BM ad MA, ita ER ad RA

b —— a —— z / $\frac{az}{b}$

Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$
BMC & DRC
ut BM ad MC, ita DR ad RC

b —— c —— $q+z$ / $\frac{cq+cz}{b}$ } add.

C A. $\frac{az+cz+cq}{b} \infty a+c$

$az+cz+cq \infty ab+cb$

$az+cz \infty ab+cb-cq$

$z \infty \frac{ab+cb-cq}{a+c}$.

Ad R C. $\frac{cq+cz}{b}$

adde X C. $t-c$

Fiat propter similitudinem
$\triangle^{rum}$ XMB & XRa.

XM MB Ra

t —— b —— XR. $\frac{cq+cz+bt-bc}{b}$ / ad $f+z$

Eritque, per 16. $tf+tz \infty cq+cz+bt-bc$
6^{ti} Elem. $tf+tz-bt \infty cq+cz-bc$

$t \infty \frac{cq+cz-bc}{f+z-b} \infty \frac{2ac}{a-c}$

$aq+az-ab-cq-cz+cb \infty 2af+2az-2ab$

$ab+cb+aq-cq-2af \infty az+cz$

$\frac{ab+cb-cq}{a+c} \infty \frac{ab+cb+aq-cq-2af}{a+c} \infty z$

$ab+cb-cq \infty ab+cb+aq-cq-2af$

$2af \infty aq$.

fit aE $\infty f \infty \frac{1}{2}q$. Id quod ostendit, rectas, quæ oppositarum sectionum Asymptoti dicuntur, in medio transversi lateris D E se invicem decussare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli T B V, cui planum harum sectionum æquidistat, esse æquales.

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B M V & a R Y

□BM□MV
bb —·— ac

ad

□aE ad □Eb

$\frac{1}{4}qq$ ad $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$.

□aI ad □Id

$\frac{1}{4}qq + qx + xx$ ad $\frac{\frac{1}{4}acqq + acqx + acxx}{bb}$. A quo subducto □^{to} I F ante invento, ∞ $\frac{acqx + acxx}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem., ▭ eFd ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$.

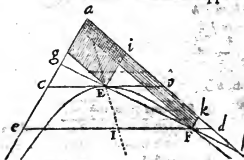
□aR ad □RY

$\frac{1}{4}qq + qz + zz$ ad $\frac{\frac{1}{4}acqq + acqz + aczz}{bb}$. A quo subducto □^{to} R G, ante invento, ∞ $\frac{acqz + aczz}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem, ▭ Z G Y ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$.

Jam cùm □ E b, ▭ eFd, & ▭ Z G Y singula sint inventa ∞ $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$, constat ipsa inter se esse æqualia. Eadem est ratio de quibuscunque aliis hujusmodi rectangulis, in infinitum assumptis. Quod ipsum est, quod docet Prop^{tio} 10. 2^{di} libri Conicorum Apollonii.

Porrò, quoniam $\frac{\frac{1}{4}acqq}{bb}$ est $\frac{1}{4}^{ta}$ pars rectanguli sub latere transverso D E ∞ q & latere recto N E, ante invento, ∞ $\frac{acq}{bb}$, manifesta hinc etiam est Prop^{tio} 1ma ejusdem libri.

Præ-



Præterea supponatur cE vel E$b \infty e$
eF ∞f, eritque
$Fd \infty \frac{ee}{f}$
$gE \infty g$
$EF \infty h$
$Fh \infty i$, eritque
$Eb \infty h+i$
$Ei \infty k$
$ai \infty l$
$Fk \infty m$
& $ak \infty n$, eritque
$ik \infty n-l$.

Tum fiat propter similitudinem $\triangle^{\text{lorum}}$ cgE & egF

ut g E ad E c, ita g F ad Fe

g —— e —— $g+h$ / f

Eritque per 15. 6^{ti} Elem. $gf \infty eg + eh$

$gf - ge \infty eh$

Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{\text{lorum}}$ Fdh & Ebh.

ut F h ad Fd, ita Eb ad E b

i —— $\frac{ee}{f}$ —— $h+i$ / e

Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $i \infty \frac{eh+ei}{f}$

$fi \infty eh + ei$

Et fit $gf - ge \infty fi - ei \infty eh$

Id est, dividendo utrinque per $f-e$, erit $g \infty i$. Hoc est, g E est æqualis Fh. Eadem est ratio de recta E F, quomodocunque per duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Asymptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propositione secundi libri Conicorum Apollonii.

Ad hæc fiat propter parallelas Ei & Fk

ut g E ad E F, ita ai ad ik

g —— h —— l / $n-l$

Eritque per 16. 6^{ti} Elem. $gn - gl \infty hl$

Hoc est, in locum g substituto i, habebitur $in - il \infty hl$, & fit $h \infty \frac{in - il}{l}$.

 Deni-

Denique fiat propter similitudinem Δlorum $E\,i\,h$ & $F\,k\,h$
ut $E\,i$ ad $E\,h$, ita $F\,k$ ad $F\,h$

k —— $h + i$ —— $m\,/\,i$

Eritque per 16. 6ti Elem. $ki \propto hm + im$

vel $ki - mi \propto hm$

& fit $h \propto \frac{ki - mi}{m} \propto \frac{in - il}{l}$

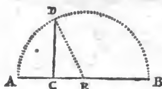
$kl - ml \propto mn - ml$

& $kl \propto mn$. Hoc est, rectangulum sub $E\,i$ & $i\,a$ est æquale rectangulo sub $F\,k$ & $k\,a$. Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangulis, sub similibus lineis comprehensis, manifestum est; prout nimirum ad hoc præter puncta E & F alia quævis in Hyperbola assumpta fuerint. Quibus haud dissimilia sunt ea, quæ Apollonius demonstravit Propne 12ma libri 2di Conicorum.

Unde demum facile est inferre, cum puncta hæc ulteriùs atque ulteriùs semper in Hyperbola assumi possint, ac inde uno latere horum rectangulorum continuè accrescente latus alterum ipsorum perpetuò decrescat; quòd idcirco Asymptoti ab, ac, & Hyperbola E F in infinitum productæ ad se ipsas propiùs accedant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato intervallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Propbus 1ma & 14ta ejusdem libri sunt ostensa.

Cæterùm quoniam Dmus des Cartes universim iis tantùm propositionibus usus fuisse videtur, quæ non nisi proprietates declarant, quæ cum subjecto suò omnimodè reciprocantur, & à Logicis proprietates 4ti modi appellari solent: visum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognosci possunt, qualem eum eruditissimus atque ingeniosissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Amstelodamensis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere.

Ut



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum esse æqualia rectangulis sub segmentis diametri, cum circulo sit reciproca nec ne: supponatur recta A B, & in eam perpendicularis C D, hanc habens proprietatem, ut quadratum super ipsâ sit æquale rectangulo sub segmentis A C, C B. Quæritur qualis sit linea A D B.

Ad quod investigandum, sectâ A B bifariam in E, ponatur A E vel E B ∞ a, C E ∞ x, & C D ∞ y: eritque A C ∞ $a - x$, & C B ∞ $a + x$. Jam cum A C multiplicatâ per C B proveniat $aa - xx$, pro rectangulo A C B; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex C D: erit $aa - xx \infty yy$. Deinde, quoniam, lineâ C D perpendiculari existente super A B, quadratum ex E D, per 47 Primi Elementorum Euclidis, est æquale duobus quadratis ex E C & C D: erit quadratum ex E D ∞ $xx + yy$. Ac proinde si in hac summa pro yy subrogetur $aa - xx$, habebitur quadratum ex E D ∞ aa, hoc est, E D ∞ a. Id quod ostendit, rectis A E, E D, & E B singulis ipsi a æqualibus existentibus, lineam A D B esse circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo esse reciprocam. Quod ipsum & hoc modo cognosci potest. Advertendo scilicet, utrum proprietas proposita sine necessariâ subjecti inclusione demonstrari possit nec ne. Si enim ea absque necessaria subjecti inclusione demonstrari nequeat, proprietas erit reciproca; sin secus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo sit reciproca, nimirum: tres angulos simul sumptos æquales esse duobus rectis: advertendum tantummodo est, utrum demonstratio illius triangulum rectangulum præsupponat nec ne; ac proinde cum ipsa absque ulla discretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum

est eandem non nisi pro communi trianguli rectanguli proprietate esse habendam.

Ita etiam considerando demonstrationem supradictæ proprietatis circuli, quoniam ipsa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura consistit, omnino exposcit, convincitur eandem proprietatem soli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, si quis naturam demonstrationis perpendat, quâ ostenditur, quadrata ordinatim adplicatarum inter se esse, sicut rectangula sub segmentis diametri: comperietur, eandem demonstrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non nisi communem proprietatem circuli existere: quandoquidem & Ellipsi, cujus Circulus non nisi speciem refert, omnino convenit.

Sed & usum horum perpendere, cum in universa Mathesi haud exigui sit momenti, non inutile fuerit sequentia, quibus eundem quadantenus indicasse existimamus, in medium afferre.

Primò itaque, postquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi sumus totam subjecti naturam hâc ratione in ea esse inclusam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diversam obtinendam, non licere ut ad id alia ejusdem subjecti proprietas adhibeatur, nisi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum sit involutum: quandoquidem sic circulum committi manifestum est.

2do, Theoremata omnia, quæ necessitatem subjecti inferunt ex proprietate jam ostensâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48. primi libri Elementorum) quæque ut plurimùm indirectè per deductionem ad absurdum demonstrari solent, possunt directè demonstrari, dummodo ostendatur, proprietatem illam cum subjecto suo esse reciprocam.

3^tio^, Si quis ad solvenda Problemata naturam subjecti retinere velit, commodissimè id præstare poterit, retinendo tantùm proprietatem aliquam, cum eodem subjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat aut etiam simplicissima existat: cum minimè necessum sit, ut is retinendis omnibus illius Theorematis aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujusmodi proprietate deducuntur.

4to, Hinc etiam perspicuum est, quàm parùm necesse sit, libros, qui Theorematibus referti sint, conscribere, quæ aut usum nullum

lum habent, aut difficulter retineri possunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris sive simplicioris proprietatis reciprocæ è natura subjecti sui nullo negotio eruuntur.

Nimirum si latus hocce rectum statuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, D *transversum erit* $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$.] Qui termini hoc etiam pacto scribi possunt $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quemadmodum postea in demonstratione pag. 33 à Domino des Cartes sunt assumpti. Similiter, si habeatur, ut paulò superiùs, $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$: poterit ejus loco scribi $\frac{z}{a}\sqrt{oo-4mp}$. Eodem modo cùm habetur $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$ (ut paulò post pagin. 31): possumus ejus loco scribere $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm-\frac{4oom}{p}}$, tollendo scilicet ex signo radicali quicquid est rationale. Haud secus fit, cùm pro $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ scribitur $\frac{a}{b}\sqrt{3}$. Quæ scribendi ratio non ineptè quoque ad radicum commensurabilium species sive operationes adhiberi potest. Ut, ad addendum $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{75}$: quoniam $3\sqrt{3}$ idem est quod $\sqrt{27}$, & $5\sqrt{3}$ idem quod $\sqrt{75}$, hinc summa earum erit $8\sqrt{3}$, & differentia $2\sqrt{3}$, productum verò multiplicationis 15, 3 seu 45; & quotiens ex divisione majoris per minorem $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic ad multiplicandum $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ per $3\sqrt{3}$, divido $27\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, seu, quod idem est, 27 per 3, & fit productum $\frac{8}{9}$. *Vide pag. 75. lin. penult. & ult.* Similiter ad dividendum fractiones $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$ per $\sqrt{3}$, multiplico earum denominatores per $\sqrt{3}$, & fiunt quotientes $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & *Vide pag. 76. lin. 7.* $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ seu $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, perinde enim est sive hoc sive illo modo scribantur. Idem de sequentibus formulis, quas hîc subjungere visum fuit, intellige. Ut si habeatur $\sqrt{ac}$, ejus loco scribere possumus $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, vel $c\sqrt{\frac{a}{c}}$. Et si habeatur $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$ scribi ejus loco potest $b\sqrt{\frac{a}{c}}$; adeò ut, si habeatur $\frac{acc+a^3}{2\sqrt{aa+cc}}$, ejus loco sub- *Vide pag. 82. lin. 18* stitui possit $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Ita pro $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$ ponere licet $\sqrt{ac}$, nec

non

non pro $2b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$ reponere $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$. Similiter pro $d + \frac{bb - bd}{b + d}$ ſcribi poteſt $\frac{dd + bb}{b + d}$. Sic etiam loco $d + \frac{bb}{b + d}$ ſcribi poteſt $b + \frac{dd}{b + d}$: cum ſub eodem denominatore reducti faciant $\frac{bb + bd + dd}{b + d}$. Et denique pro $\frac{c}{\sqrt{c}} - \frac{a}{\sqrt{a}}$ ſcribere poſſumus $\frac{c - a}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$ vel $\sqrt{c} - \sqrt{a}$. Et ſic de aliis, ut paſſim in hiſce commentariis eſt videre.

E *Sed ſi ſectione Hyperbolâ exiſtente &c.*] Notandum hîc, applicatam eſſe Hyperbolam ei linearum poſitioni, cui poſtea Circulum quadrare ab Authore oſtenditur. Quod tam perſpicuitatis quàm brevitatis ſtudio factum; quandoquidem ea, cùm literæ A, B, C, D, &c. in iiſdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem ſcripſit, ſic faciliùs intelligi poſſunt, quàm ſi nunc in uno, nunc in alio eſſent quærendæ.

Etenim cùm requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione C B per C F, æquale ſit ei, quod fit ex ductu C D in C H, oportet lineam illam curvam tranſire per quatuor interſectionum puncta datarum linearum: nimirum, per interſectionem A, linearum D A, A B (quoniam eo caſu lineæ B C & C D nullæ ſunt, ac proinde ſingulæ, in ſingulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per interſectionem G linearum A B, G H, (quo caſu lineæ C H & C B nullæ ſunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipſarum F E, G H (quo caſu C F & C H nullæ ſunt), & ipſarum D A, E F (quo caſu C D & C F nullæ ſunt), quæ in hac figura non ſunt expreſſæ, ſed in Circulo obſervatæ apparent. Unde, cum D[nus] des Cartes, brevitati ſtudens, referre voluerit caſus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, poſtquam hujus exempli locum Circulum eſſe oſtendit, nec in quæſtione quicquam mutavit, eidem linearum poſitioni non Hyperbola ſicut Circulus reſponderit. Nec etiam hinc ullus ſequitur error, quandoquidem tota quæſtio nondum determinata exiſtit, ſed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri poteſt, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum poſitioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non tranſeat per ullas datarum linearum interſectio-

ſectio-

sectiones. Ut, exempli causâ, si rectangulum ex F C in C D debeat esse majus, quàm rectangulum ex C B in C H, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid simile: sequitur eam sic applicari posse, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. suis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola afferre voluit, faciliùs intelligantur, quàm si figura mutata fuisset.

Ejusdem brevitatis studio nulla etiam hîc mentio fit oppositarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò post pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter se oppositas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè semper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda suscepit, nihil omisit. Atque idcirco hîc maluit eam linearum positionem exhibere, cui conveniret Circulus, quàm cui competeret Ellipsis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cùm in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata.] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas supponere oportet lineas incognitas, & materia tantùm pro una æquatione suppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ supponendæ sunt incognitæ lineæ A B & B C; quarum una ostendat, ad quod punctum lineæ A B duci debeat recta B C in dato angulo; & altera, ubinam illud ipsum in eadem recta sit sumendum. Ubi porrò, postquam conditiones omnes sunt adimpletæ, inventa est æquatio F

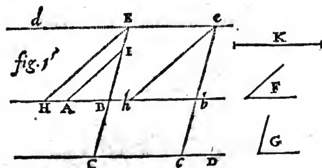
$$yy \propto \frac{\begin{smallmatrix}-dekzx\\+cfglz\end{smallmatrix}\,y\,\begin{smallmatrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{smallmatrix}\,y\,\begin{smallmatrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{smallmatrix}}{ez^3-cgzz}$$

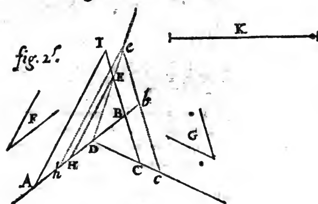
, duas continens quantitates incognitas x & y. Adeò ut, cum in ipsâ una desit conditio ut sit prorsus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio assumere liceat pro incognita x, cui non respondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipsi radici x tribuerimus diversos valores.

Cæterùm quoniam hæc quæstio extendi potest ad omnes lineas curvas, quæ sub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi possunt: ita ut nulla sit linea curva primi generis, quæ ad illam non sit utilis, quando in quatuor lineis proponitur: nec ulla

secundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis est proposita, atque ita porrò: placuit hîc quoque subjungere casum, quando in duabus tantùm lineis est proposita, qui quidem omnium simplicissimus existit.

Locus ad duas lineas. Datis positione duabus rectis lineis AB, CD, inter se parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipsas invenire, ut E, à quo si in datis angulis F & G ad positione datas AB, CD, duæ ducantur rectæ lineæ EH, EC, ipsæ datam inter se habeant rationem *r* ad *s*.





Supponantur anguli BAI, DCB æquales angulis F, G; & con-

concurrant rectæ A I, C B, (ubicunque hosce æquales angulos ad positione datas constituentes) in punctum I. Deinde ratio, quam H E ad E C servare debet, detur ut A I ad K, vel si non ita detur, ad hanc formam reducatur.

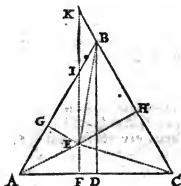
Resolutio. Puta factum esse, quod quæritur, ponaturque $BC \propto q$, $AI \propto r$, $K \propto f$, $BI \propto t$, & $BE \propto x$. Unde, cum propter triangulorum B I A, B E H similitudinem, B I sit ad I A, hoc est, t ad r, sicut B E seu x ad E H, erit $EH \propto \frac{rx}{t}$. Deinde quoniam A I est ad K, hoc est, r ad f, sicut H E ad E C, sive $\frac{rx}{t}$ ad $q + x$: erit productum sub extremis $rq + rx$, æquale producto sub mediis $\frac{rfx}{t}$. Ac proinde si utrinque dividatur per r, atque multiplicetur per t, æquatio erit $fx - tx \propto tq$. Hoc est, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut $f - t$ ad t, ita q ad x. Unde talis emergit *Constructio.* Fiat, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I; ita B C ad B E. Tum per E ducatur E *d* ipsi A B seu C D parallela (ut in prima fig.); aut ex D per E agatur recta D E indefinitè (ut in secunda fig.): Dico si ex quolibet ejus puncto, ut *e*, ad positione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ *e h*, *e c* in datis angulis F & G, hoc est, ipsis A I, I C parallelæ, dictas lineas datam inter se rationem servaturas, hoc est, *h e* fore ad *e c*, sicut A I ad K, seu r ad f.

Demonstratio. Quoniam enim est, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I, ita B C ad B E: erit quoque componendo K ad B I, sicut C E ad E B. Unde cum ratio C E ad E B composita sit ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B seu A I ad I B: erit quoque ratio K ad B I ex eisdem rationibus composita. Eodem modo, quoniam item ratio K ad B I componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio composita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B, eadem cum ratione, quæ componitur ex K ad A I, & ex A I ad I B. Quare si communis auferatur ratio A I ad I B, erit quoque reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, seu f ad r. Quod erat faciendum. Eadem est ratio ubicunque tandem in recta *d* E punctum *e* assumatur. Unde manifestum fit, punctum quæsitum *e* rectam lineam contingere D E, positione datam, ac proinde in loco plano esse. Omitto reliquos hujus quæstionis casus, cum à quovis ad horum imitationem facilè construi possint.

G *At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut Sphærica, aut magis composita esse potest.*] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis sequentibus illustrare conabimur.

Locus ad Superficiem.

Dato triangulo æquilatero A B C, à cujus vertice B ad basin A C demissa sit perpendicularis B D: oporteat intra ipsum invenire punctum, ut E, à quo si ad opposita latera deducantur perpendiculares E F, E G, & E H, ipsæ simul sumptæ æquentur perpendiculari B D.



Factum jam sit, & productâ F E, usque dum secet latus A B in I, B C verò productum in K; ponatur A D seu D C ∞ a, D B ∞ b, A F ∞ x, & F E ∞ y. Hinc cum similia sint triangula A D B, & A F I, erit sicut A D ad D B, hoc est, a ad b, ita A F seu x ad F I; quæ ideo erit $\frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E ∞ y, relinquetur E I ∞ $\frac{bx}{a} - y$. Similiter, quoniam similia sunt triangula C D B & C F K, erit C D ad D B, hoc est, a ad b, ut C F seu $2a - x$ ad F K; quæ ideo erit $2b - \frac{bx}{a}$. E qua si auferatur F E ∞ y, restabit E K ∞ $2b - \frac{bx}{a} - y$. Eodem modo cum, propter similitudinem triangulorum A D B, E G I, A B sit ad A D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, sicut I E seu $\frac{bx}{a} - y$ ad E G; erit E G ∞ $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Non secus, cum similia sint triangula E K H & D B C, erit ut B C ad C D, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, ita E K seu $2b - \frac{bx}{a} - y$ ad E H; quæ ideo erit

erit $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Adeoque si addantur perpendiculares inventæ E F, E G, & E H, erit earum summa b, æqualis b, perpendiculo trianguli A B C.

Ubi patet, quòd, postquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæstio proposita non sit Problema, sed Theorema; seu quòd conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæstionis datis sit comprehensa, neque unquam sine hac conditione esse possit: Atque adeò, duas in ea conditiones desiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro x inveniendam, quâ innotescat, ad quod punctum lineæ A C duci debet perpendicularis E F; atque alteram, ad æquationem pro y inveniendam, quâ cognoscatur, ubinam illud ipsum in hac perpendiculari sit sumendum: quibus mediantibus quæstio penitus determinata reddatur. Quare, postquam conditiones in quæstione præstandæ exsecutæ sunt, & neutri linearum incognitarum A F, F E æquatio respondet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæsitum punctum E ubique intra triangulum A B C assumi. Cujus demonstratio facilis est. *Vide ea, quæ habentur pag. 4.*

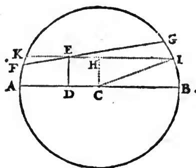
Ducantur enim rectæ A E, E B, & E C, ut constituantur tria triangula A E C, A E B, & B E C.

Quoniam igitur horum triangulorum bases sunt æquales, ac quælibet ex ipsis æqualis basi trianguli A B C; habebunt ipsa ad triangulum A B C eandem rationem, quam perpendicula F E, E G, & E H. Quare cum triangula A E C, A E B, & B E C simul sumpta ipsi triangulo A B C sint æqualia: erunt quoque perpendiculares E F, E G, & E H simul sumptæ ipsi perpendiculari B D æquales. Quod erat demonstrandum.

Porrò notandum est, quòd, quemadmodum punctum E, intra triangulum A B C assumptum, exhibet semper eandem summam perpendicularium E F, E G & E H, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari B D, ita contra, si sumatur extra triangulum A B C, atque ab eo ad singula ejus latera, si opùs est, producta perpendiculares demittantur, obtineatur semper eadem perpendicularium differentia, quæ rursus perpendiculari B D sit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus subtensum angulo, intra quem punctum sumptum

erit, auferre ex summa duarum reliquarum. Quæ simili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus sit demonstratio.

Alterum exemplum, quod hîc afferendum duxi, desumpsi ex inventis Nobilissimi & præclari Juvenis D. Christiani Hugenii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quæque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint.



Dato Circulo A G B, dataque positione diametro A B: invenire extra ipsam punctum E, à quo si ad A B demittatur perpendicularis E D, & per idem punctum agatur recta quædam linea F G utrinque à circumferentiâ terminatâ, ut rectangulum F E G, sub segmentis ejus F E, E G comprehensum, unà cum quadrato perpendicularis demissæ E D, æquetur rectangulo A D B, sub segmentis diametri A D, D B.

Ductâ per E rectâ K I parallelâ ipsi A B, deducatur ex centro C in eam perpendicularis C H, jungaturque C I. Positâ igitur A C vel C B ∞ a, C D ∞ x, & D E ∞ y: erit H I ∞ $\sqrt{aa - yy}$, E I ∞ $\sqrt{aa - yy} + x$, & E K ∞ $\sqrt{aa - yy} - x$. Unde si multiplicavero E K ∞ $\sqrt{aa - yy} - x$ per E I ∞ $\sqrt{aa - yy} + x$, fiet rectan-

rectangulum KEI seu FEG $\infty\ aa - yy - xx$. Cui si addatur *35 Tertii*
quadratum ex ED $\infty\ yy$, erit summa $aa - xx \infty\ aa - xx$, re- *Elem.*
ctangulo ADB, utpote æqualis ei, quod fit ex $a - x$ in $a + x$.

Quia igitur hîc utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri potest æquatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad arbitrium sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hac quæstione conditionum, ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quod facilè demonstrari potest.

Quoniam enim CH perpendicularis est ad KI, secabit re- *3 Tertii*
ctam KI bifariam in H. Unde cum in E quoque inæqualiter sit *Elem.*
secta, erit rectangulum KEI, sub inæqualibus segmentis com- *5 Secundi*
prehensum, seu, quod idem est rectangulum FEG, unà cum *Elem.*
quadrato segmenti intermedii EH, æquale quadrato dimidiæ li- *35 Tertii*
neæ HI. Eodem modo, quoniam recta AB bifariam divisa est *Elem.*
in C, & non bifariam in D: erit rectangulum ADB unà cum quadrato intersegmenti DC, æquale quadrato ex CB seu CI. Quare cum quadratum CI æquetur quoque quadratis CH, HI, quorum quidem quadratum HI æquale est ostensum rectangulo FEG, unà cum quadrato EH: sequitur rectangulum ADB unà cum quadrato DC seu EH æquari rectangulo FEG unà cum duobus quadratis CH, EH. Ac proinde, dempto communi quadrato EH, remanebit rectangulum ADB æquale rectangulo FEG, unà cum quadrato CH seu ED. Quod erat demonstrandum. Non secus demonstrabitur, omne aliud punctum, intra Circulum extra diametrum AB assumptum, præstare id quod quæritur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, sumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur perpendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum sub segmentis hujus rectæ comprehensum, unà cum quadrato perpendicularis demissæ, æquale rectangulo sub segmentis diametri. Idem ferè contingit si extra Circulum acceptum fuerit punctum.

Etenim,

Etenim,

Assumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum A B, ipsamve productam, si opùs est, deductâ perpendiculari E D, tum verò rectâ E F, Circulum utcunque in F & G secante: erit rectangulum A D B, unà cum quadrato rectæ D E, æquale rectangulo F E G. Quod similiter ut supra experiri licet, atque demonstrare.

Porrò sicut in allatis exemplis loca quæsitorum punctorum fuerunt ad superficies planas, easque terminatas, vel in infinitum extensas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ sunt ad superficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extensas.

Si enim, exempli caussâ, in figura pag. 123 manente rectâ A B, & in ea punctis A & B, circumvolvatur semicirculus F D E, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, describetur superficies Sphærica, in qua si quodlibet punctum accipiatur, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur D A, D B; habebunt ipsæ datam inter se rationem, hoc est, eamdem, quam P H ad M N. Ita ut punctum D sit ad superficiem curvam terminatam, utpote ad superficiem Sphæricam, conversione semicirculi F D E descriptam. Eâdem ratione, si à duobus datis punctis duæ inflectantur rectæ

rectæ lineæ in data differentia: punctum ad inflexionem erit ad superficiem Hyperbolicam, positione datam. Etenim si in plano quocunque, quod per data puncta transit, describatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta existant, & axis transversus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; describetur superficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua si ad libitum sumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ lineæ, servabunt illæ inter se differentiam datam.

Atque sic progrediendo curvæ superficies ostendi possunt, in infinitum magis magisque compositæ, quæ quæsitorum punctorum determinationi inserviunt. Verùm cum sufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuisse, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, solidis, aliisve magis compositis discernantur: ulteriori explicationi supersedebimus.

Cæterùm, ne quid, quod ad hanc materiam spectare possit, desideretur, sed Geometria omnibus numeris sit absoluta, paucis subjiciam, quomodo cognosci possit, quando locus alicujus puncti est ad solidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod sciam) hactenus sit deprehensum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem, locus, in quo illud reperitur, Solidum est: & vel planis constans superficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compositâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel sunt terminata, vel indefinitè extensa.

Locus ad Solidum.

Ut, si intra Tetraëdrum, inveniendum sit punctum, ita ut summa perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus constat, demissarum, æquetur perpendiculo Tetraëdri: cadet illud quovis loco intra Tetraëdrum, ita ut nullum intra ipsum punctum assumi possit, quod quæsito non satisfaciat. Quod eodem modo indagatur & demonstratur, atque superiùs in triangulo æquilatero est ostensum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices seu incognitæ quantitates (quarum una inservit determinandæ longitudini perpendicularis,

quæ à quæsito puncto cadit supra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eædem occurrunt quantitates: indicio est, incognitas quantitates ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdrum assumatur punctum, cum omnia quæsito satisfaciant.

Non dissimili ratione demonstrare possumus: Si extra Tetraëdrum sumatur punctum, à quo ad singula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, si quæstio fuerit de inveniendo puncto, à quo demissæ perpendiculares simul collectæ, æquentur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum sit in solido terminato, utpote ubique intra Tetraëdrum; si verò postuletur, ut differentia ipsarum eidem perpendiculo sit æqualis, reperietur punctum illud in solido indefinitè extenso, atque sumi poterit extra Tetraëdrum, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planisque superficiebus contentis, dici & demonstrari posse, perspicuum est.

Alterum exemplum, quod hîc adducemus, ex Hugeniano Problemate deduci potest, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatero deduximus, & est hujusmodi: Si Sphæra plano per centrum secetur, sumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per subjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphæræ superficie terminata: erit rectangulum, sub segmentis hujus rectæ comprehensum, æquale rectangulo sub segmentis rectæ, utcunque per assumptum punctum ad Sphæræ superficiem ductæ, unà cum demissæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit si punctum sumatur extra Sphæram.

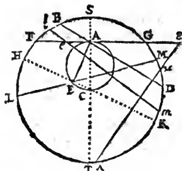
His adde sequens Problema, quod occasione istius Hugeniani sibi ante tres annos è vestigio inquirendum proposuit Vir Celeber-

berrimus atque undequaque Doctissimus D. Johannes Wallisius, S. T. D, & in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor SAVILIANUS. Estque hujusmodi:

In circulo, cujus centrum C, assignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D: inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, si per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum distantiæ A E æquetur vel differentiæ vel summæ rectangulorum L E M, B A D.

Puta □ A E ∞ { ▭ L E M — ▭ B A D. / ▭ B A D — ▭ L E M. / ▭ B A D + ▭ L E M.

Diametro A C describatur circellus, quem contingat recta infinita F A G. Dico, singula puncta in peripheria circelli præstare



primum quæsitum: quæ verò in recta F G intra circulum, secundum: quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam 1mo, si sit E in peripheria circelli, (ductis diametris S A C T, H E C K,) erit * ▭ B A D ∞ ▭ S A T ∞ □^{to} Radii (— □ A C ∞) — □ E C — □ A E *. Et ▭ L E M ∞ ▭ H E K ∞ □^{to} Radii — □ E C. Ergo ▭ L E M — □ A E ∞ ▭ B A D, vel ▭ L E M — ▭ B A D ∞ □ A E. *per 35 Tertii Elem. *per 5 Secundi Elem.

2do. Si in recta F G intra circulum sumatur E vel *e*: erit ▭ B A D ∞ ▭ F A G ∞ □ F A ∞ ▭ F *e* G + □ A *e*. Et ▭ *lem* ∞ ▭ F *e* G. Ergo ▭ B A D — ▭ *lem* ∞ □ A *e*.

 3^{tio}.

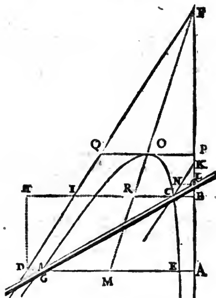
3^{tio}. Si in F C continuatâ sumatur e vel ε extra circulum, erit * $\sqsubset\!\sqsupset \lambda\varepsilon\mu \infty \sqsubset\!\sqsupset F\varepsilon G \infty \square A\varepsilon$ ($- \square FA \infty$) $- \sqsubset\!\sqsupset BAD$ *. Ergo $\sqsubset\!\sqsupset BAD + \sqsubset\!\sqsupset \lambda\varepsilon\mu \infty \square A\varepsilon$. Quod erat faciendum. Idem, mutatis paucis, procederet pariter, etiamsi punctum A extra circulum assignaretur.

* per 36 Tertii Elem.
* per 6 Secundi Elem.

Quoniam igitur assumpto puncto A ceu dato, puncta invenienda E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli, aut in rectam F G intra circulum, aut denique in eandem extra circulum continuatam: patet, si in locum horum circulorum accipiantur duæ sphæræ, quòd similiter hæc puncta E ubique pro lubitu sumi possint in superficie convexa sphæræ A E C, aut in superficie plana circuli, cujus diameter F G, aut denique in eodem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenso, prout scilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia vel summa quadrato distantiæ horum sumendorum punctorum E à puncto A requiritur æqualis. Quòd si verò idem punctum A non unum locum obtineat, sed ubivis intra circulum S L T assignetur, quòd tunc quidem locus puncti E ubique in solido intra vel extra superficiem sphæræ S L T, pro diversa quæsiti ratione, sit futurus. Atque ita de aliis.

H *Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem, quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt.*] Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ C E, per motum regulæ G L & plani rectilinei C N K L descriptæ, (quam superiùs Hyperbolam esse ostendimus) ad puncta lineæ rectæ A B exprimatur per æquationem $yy \infty cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$; prout nimirum in ea assumitur punctum A, tanquam certum ac determinatum, à quo calculus incipiat: facile quoque est invenire relationem, quam habent ad puncta ejusdem A B, quando in ea, loco pun-

puncti A, assumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus initium sumat. Etenim si fiat, ut N L ad L K, hoc est, ut c ad b, ita D A seu $a+c$ ad A F, erit ipsa $\infty \frac{ab}{c} + b$. E qua si dematur A B



$\infty\ x$, relinquetur B F $\infty \frac{ab}{c} + b - x$. Hinc si in æquatione inventa $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ loco x substituamus $\frac{ab}{c} + b - x$: inveniemus æquationem $yy \infty \frac{cx}{b}y - ac$, quâ ostenditur relatio, quam habent puncta Hyperbolæ C E ad puncta rectæ B A, respectu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti sit simplicior, arguit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ B A specialiorem seu simpliciorem habere relationem, quando in A B punctum F pro certo & determinato assumitur, quàm cum in ea accipitur punctum A.

Cæterùm relationem, quam Hyperbolæ puncta servant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognosces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta alicujus curvæ ad puncta rectæ

positione datæ, datus est modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujusvis rectæ positione datæ. Adeoque tot inventis æquationibus diversis, ad quot diversas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: constabunt totidem modi eam describendi, ex quibus faciliores seligi poterunt.

I *Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem spectat: ita ut non opùs sit de his agere apertiùs.*] Sic ad comparandam Ellipsin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter se habent, prout circa eundem axem sunt descriptæ: Esto axis ∞ q, latus rectum pertinens ad axem ∞ r, segmentum axis inter verticem & utriusque ordinatam interceptum ∞ x, ipsa verò adplicata ∞ y. Hinc cum in Circulo latus transversum sive diameter æquale sit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis sit yy ∞ $qx - xx$; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipsis ad puncta axis sit yy ∞ $rx - \frac{rxx}{q}$: quæ inter se sunt ut q ad r, hoc est, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata est rationis, quam habet hic axis ad axem secundum, sequitur Circulum ad Ellipsin esse, ut axis primus ad axem secundum. Id quod demonstratum est ab Archimede prop^ne 5ta libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2do tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione.

Porrò extendi potest hoc ipsum ad cognoscendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

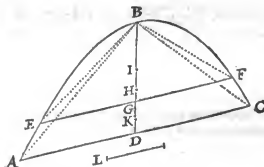
Etenim, cum ostensum sit, quadrata ordinatim adplicatarum utriusque curvæ esse inter se, sicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad se invicem sint ut Circuli, qui ab ipsis tanquam radiis conversione semicirculi & semi-ellipsis fiunt & utramque figuram describunt: patet Sphæram ad Sphæroïdes esse, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejusdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede ostensum.

Adeò ut non modò ex hoc solo inveniri propemodum possit

omne

omne id, quod determinari poteſt, atque ad magnitudinem ſpacii, quod hæ curvæ comprehendunt, ſpectat, quemadmodum Auctor innuit; ſed etiam, quod ſpectat ad magnitudinem ſolidi, à ſuperficie aliqua curva comprehenſi, atque ab hujuſmodi linea generati. Sic ut ex his omnibus conſtet, Authorem id præcipuè operam dediſſe, ut, neglectis particularibus, & præſuppoſitis iis, quæ ab aliis vel inventa vel demonſtrata eſſent, ea tantùm traderet, quæ difficilia, utilia, & maximè generalia eſſent, omniaque paucis comprehenderet; quæ verò faciliora & levioris momenti, non niſi obiter tantùm perſtringeret. Quod ſanè rarò ab Auctoribus hodie obſervatum cernimus, cum plerique id ſtudeant, ut eorum opera in ampliſſima volumina excreſcant.

Cæterùm cum ex hac ſpacii aut ſolidi magnitudine deinceps facile ſit invenire ejuſdem centrum gravitatis, non abs re fuerit ſi hîc ſimiliter modum, quo id inveſtigari poſſit, uno atque altero exemplo exponam.

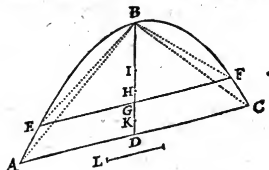


Igitur ad inveniendum, exempli cauſsâ, gravitatis centrum Parabolæ A B C ac ejus portionis A E F C, abſciſſæ videlicet per rectam E F ipſi A C parallelam: ſuppono centrum totius A B C eſſe H, Parabolæ autem E B F centrum eſſe I, & centrum portionis A E F C eſſe K. Deinde factâ B D ∞ a, A D vel D C ∞ b, E G vel G F ∞ c, B H ∞ x, & H K ∞ y, jungo A B, B C, E B, & B F. Quibus poſitis, quæro rationem, quæ eſt inter triangulum A B C & triangulum E B F. Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum ex A D ſeu bb ſit ad quadratum ex E G ſeu cc, ſicut D B ſeu a ad

G B

G B: erit G B $\infty \frac{acc}{bb}$. Ac proinde cum A D multiplicata per D B producat ab, at E G multiplicata per G B producat $\frac{ac^3}{bb}$, erit ratio trianguli A B C ad triangulum E B F quæ ab ad $\frac{ac^3}{bb}$ seu b^3 ad c^3. Hæc autem cum eadem sit rationi, quam inter se habent Parabolæ A B C & E B F (siquidem Parabola quælibet trianguli sibi inscripti maximi est sesquitertia): sequitur rationem portionis A E F C ad Parabolam E B F eandem fore quam $b^3 - c^3$ ad c^3. Porrò cum eadem sit situs ratio centri I in Parabola E B F, quæ centri H in Parabola A B C: erit D B seu a ad B H seu x, sicut G B seu $\frac{acc}{bb}$ ad B I $\frac{ccx}{bb}$. Quâ subductâ ex B H seu x, relinquitur I H $\infty \frac{bbx - ccx}{bb}$. Denique cum I H ad H K, hoc est, $\frac{bbx - ccx}{bb}$, ad y, eandem habere debeat rationem, quam portio A E F C ad Parabolam E B F seu $b^3 - c^3$ ad c^3, fiet, abbreviando primum & tertium terminum per $b - c$, ac deinde multiplicando extremos tum medios, $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \infty bby + bcy + ccy$, vel $\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + bbcc} \infty y$. E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ A B C, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis A E F C, faciendum esse, ut B H seu x sit ad H K seu y, sicut $b^4 + b^3c + bbcc$ ad $bc^3 + c^4$; hoc est, inventis in ratione A D ad E G quinque continuè proportionalibus, erit B H ad H K, ut summa priorum trium ad summam duarum posteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipsum punctum H, opus tantùm est concipere rectas A D & E G esse æquales, hoc est, $b \infty c$, ita ut E G F coïncidat cum A D C, quo casu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque D H seu y æqualis fiet $\frac{2}{3} x$, hoc est, duabus tertiis ipsius H B. Quod ipsum monstrat, sectâ diametro B D in 5 æquales partes, pro linea B H seu x tunc earundem sumendas esse tres. Id quod aliter quoque à nobis est ostensum in Exercitationibus nostris Mathematicis libr. 5. sectione 19.

Eodem modo si in Conoïde Parabolico A B C & ejusdem portione A E F C centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iisdem quæ supra positis, quærere rationem, quæ est inter Conum A B C & Conum E B F: invenieturque ut b^4 ad c^4. Hæc enim



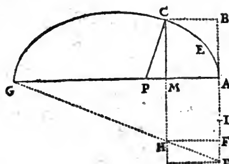
enim cum eadem quoque sit rationi, quæ est inter duos Conoïdes A B C & E B F (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroïdibus Archimedis Conoïs quilibet Parabolicus sesquialter esse probatur Coni, qui eandem habet basin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem A E F C ad Conoïdem E B F fore, ut $b^4 - c^4$ ad c^4. E quibus porrò, ut supra, invenitur $y \propto \frac{c^4 x}{b^4 + bbcc}$, hoc est, invento H, centro gravitatis Conoïdis A B C, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis A E F C, faciendum esse ut B H sit ad H K, sicut $b^4 + bbcc$ ad c^4, seu, quod idem est, ad D B & G B quærendam esse tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut B H sit ad H K, sicut summa ipsarum D B, G B ad tertiam L. Ubi tandem, si ad ipsum punctum H habendum statuamus, ut ante, $b \propto c$, invenietur $y \propto \frac{1}{2} x$. Quod ipsum docet diametrum B D in 3 æquales partes esse dividendam, atque pro B H earundem sumendas esse duas. Atque ita de aliis.

Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C, &c.] K
Quæ hâc lineâ & sequentibus usque ad paginæ sequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur usque ad pag. 44, quibus in specie agit de natura quarundam curvarum, quas, postquam ad æquationes reduxit, deinde hasce æquationes cum alia comparat, nempe $yy - 2ey + ee \propto 0$ aut $zz - 2fz + ff \propto 0$, aliave quæ ex hac vel illa sit composita, ut inveniatur tandem quantitas incognita v.

Quemadmodum si C E est Ellipsis, in qua M A sit segmentũ diametri, ad quam C M sit ordinatim adplicata, quodq; L

Hh *pro*

pro latere recto habeat r, pro transverso autem q: fiet per 13tiam Theorema 1mi libri Conicorum Apollonii: $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$. *unde tollendo* xx, *restabit* $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{ryy}{q}$, *vel* $yy\ \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ *aequale nihilo.*] Etenim A D latere existente recto $\infty\ r$, eoque ad A G perpendiculari: erit, propter triangulorum G A D, D H F similitudinem, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita H F seu M A, hoc est, y, ad F D, quæ ideo est $\frac{ry}{q}$. Quam si per H F multiplicemus, fiet rectangulum HFD $\infty\ \frac{ryy}{q}$. Deinde quoniam per 13tiam Prop. 1mi libri Conicorum Apollonii rectangulum M A D, minus rectangulo H F D, æquatur quadrato ex C M; & quidem rectangulum M A D sit ry: erit rectangulum M F $\infty\ ry - \frac{ryy}{q}$. Atque idcirco æquatio talis; $ry - \frac{ryy}{q} \infty\ xx$; hoc est, $ry - \frac{ryy}{q} \infty\ ss - vv + 2vy - yy$: quippe quod similiter ipsi xx est æquale. Hæc autem æquatio ut ad superiorem reducatur, oportebit utrobique per q multiplicare, ut fractio evanescat: fietque $qry - ryy \infty\ qss - qvv + 2qvy - qyy$. Denique factâ transpositione, ut quantitates in yy ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ autem alteram, dividatur utrinque per $q - r$, habebiturque



$$yy \infty \frac{qss - qvv + 2qvy - qry}{q - r} \text{ sive } yy \frac{-qss + qvv - 2qvy + qry}{q - r} \infty 0.$$

Cætera, quæ huc spectant, inveniuntur inter lin. 21. pag. 45. & lin. 9. p. 46: quæ, cum satis sint clara, explicatione non egent.

m *Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, &c.*] Cum enim, propter similitudinem triangulorum

rum GMC, CBL, GM sit ad MC, hoc est, $b-y$ ad x, ut CB, hoc est, y, ad BL; erit BL $\frac{xy}{b-y}$. Cui si addatur KL ∞ c, fiet KB ∞ $\frac{cb-cy+xy}{b-y}$. Jam verò, quia, per 11 Prop^{nem} libri 1^{mi} Conicorum Apollonii, in Parabola CK rectangulum sub diametri segmento KB & latere ejus recto d æquatur quadrato ipsius CB, quæ ad eandem diametrum ordinatim est applicata: hinc si multiplicetur $\frac{cb-cy+xy}{b-y}$ per d, erit æquatio talis:

$$yy \infty \frac{dcb-dcy+dxy}{b-y}.$$

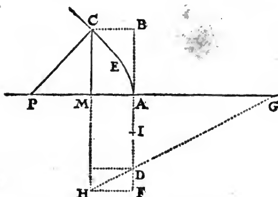
Unde multiplicando utrinque per $b-y$, fiet $dcb-dcy+dxy \infty byy-y^3$. Factaque transpositione, ut dxy unam teneat æquationis partem, erit $dxy \infty dcy-dcb+byy-y^3$. In qua si pro x ponatur summa ipsi æqualis, habebitur $dy\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$, seu $\sqrt{ddssyy-ddvvyy+2ddvy^3-ddy^4} \infty dcy-dcb+byy-y^3$. Ut autem æquatio ab asymmetria liberetur, quadretur utraque pars, fiatque transpositio ut quantitates omnes ab una parte habeantur, invenieturque

$$y^6-2by^5\left.\begin{matrix}+bb\\+dd\\-2dc\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}+ddcc\\+ddvv\\-2dcbb\\-ddss\end{matrix}\right\}yy-2ddccby+ddccbb \infty 0.$$

Reliqua huc spectantia invenientur à lin. 9. pag. 46. usque ad lineam ultimam paginæ sequentis, quæ explicatione non indigent.

Quoniam autem inventio harum linearum non solùm elegans ac subtilis, verùm etiam per se jucunda atque utilis existit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe est, si ostendero quo pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoïde sint inveniendæ.

 Sit



Inventio dictarum linearum in Hyperbola.

Sit latus transversum $AG \infty q$, rectum verò ∞r, CM vel $AB \infty x$, MA vel $BC \infty y$, $PA \infty v$, & $PC \infty s$. Deinde, propter similitudinem triangulorum GAD, DFH, fiat, ut GA ad AD, hoc est, q ad r, ita HF seu MA, hoc est, y, ad FD, quæ ideo erit $\frac{ry}{q}$. Hæc si multiplicetur per $HF \infty y$, prodibit rectangulum $HFD \infty \frac{ryy}{q}$. Cui porrò si addatur rectangulum DM, ∞ry, fiet rectangulum $MAF \infty \frac{ryy}{q} + ry$. Jam verò, quia, per 12^mam^ Prop^nem^ 1^mi^ libri Conicorum Apollonii, rectangulum MAF æquale est quadrato ex MC seu xx, erit æquatio $\frac{ryy}{q} + ry \infty xx$, vel $\frac{ryy}{q} + ry \infty ss - vv + 2vy - yy$, subrogando nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Unde multiplicatâ utrâque parte per q, fiet $ryy + qry \infty qss - qvv + 2qvy - qyy$; transpositisque qyy & qry in contrarias partes, $qyy + ryy \infty - qry + 2qvy - qvv + qss$; ac denique utrâque parte divisâ per $q + r$,

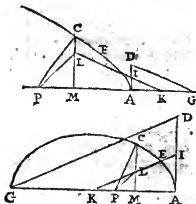
$$yy \infty \frac{-qry + 2qvy - qvv + qss}{q + r}, \text{ vel}$$

$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q + r} \infty 0,$$ collocando nimirum quantitates omnes ad unam partem.

Dein-

Deinde, ad inveniendam quantitatem quæsitam v, comparetur æquatio inventa cum æquatione ejusdem formæ $yy - 2ey + ee \infty 0$, ubi y æquatur e. Quare cum utriusque primus terminus planè sit idem, comparetur secundus cùm secundo, nempe, $\frac{+qry - 2qvy}{q+r}$ cum $-2ey$, vel, quod idem est, $\frac{+qr - 2qv}{q+r}$ cum $-2e$: ac idcirco multiplicetur utrinque per $q+r$, & fiet $+qr - 2qv \infty -2qe - 2re$. Postea translato $2re$ ad alteram partem dividatur utrinque per $2q$, fietque $\frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q} \infty v$, vel $v \infty y + \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, quandoquidem e ipsi y supposita est æqualis.

E quibus patet, ad inveniendam rectam P C, latus rectum A D secandum esse bifariam in I, & rectam P M ipsi I F sumendam esse æqualem. Quod in Ellipsi quoque est observandum.



His adde sequentem constructionem, quam Vir insignis ac Geometra præstantissimus D. Auzotius utrique huic sectioni pariter convenientem invenit, ejusque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis est.

Existente A D, ut ante, latere recto, & A G latere transverso, ad inveniendam P C, ductis C M, A D ordinatim ad A G, junctâque G D, agatur per centrum sectionis K eidem parallela K I, secans C M in L. Dein assumptâ P M æquali M L, jungatur P C, eritque secans quæsita.

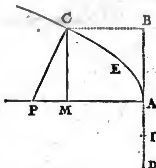
Quod ita patet.

Est enim propter similitudinem triangulorum G A D, K M L, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita K M, hoc est, $\frac{1}{2}q \pm y$ ad M L $\frac{1}{2}r \pm \frac{ry}{q}$. Unde cum A P inventa sit $\infty y \pm \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; adeoque P M $\infty \frac{1}{2}r \pm \frac{ry}{q}$, liquet P M & M L esse æquales. Quemadmodum fuerunt assumptæ.

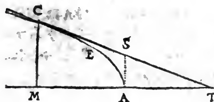
Ubi porrò animadvertere licet, si ex puncto P ceu dato recta P C sit ducenda, quæ utramque sectionem vel earum contingentes ad rectos angulos secet, sive ut circulus, qui ex P ejus intervallo describitur, utramque curvam tangat, opus tantùm esse ducere P L, ita ut angulus A P L sit semissis anguli A M C: si enim per L, ubi hæc recta ipsi K I L occurrit, ducatur M L C ordinatim ad A G, hoc est, ipsi A D parallela, erit juncta P C secans quæsita, sive circulus ex P intervallo P C descriptus utramque curvam in C continget, ut requirebatur.

In Parabola.

Sit latus rectum A D ∞ r, C M vel A B ∞ x, M A vel B C ∞ y, P A ∞ v, & P C ∞ s. Quoniam igitur per 11[mam] Prop[nem] 1[mi] libri Conicorum Apollonii rectangulum sub segmento diametri M A & latere recto A D æquatur quadrato ordinatim applicatæ C M: erit ry ∞ xx, vel ry ∞ $ss - vv + 2vy - yy$, substituendo nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Deinde quantitatibus omnibus ab una parte in alteram translatis, ut yy sit adfecta signo +, habebitur æquatio $yy \begin{matrix} +r \\ -2v \end{matrix} y \begin{matrix} +vv \\ -ss \end{matrix}$ ∞ 0.



Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee$ ∞ 0, ubi y & e sunt æquales, conferendo nempe singulos terminos unius cum singulis alterius: nimirum, secundum $+r - 2v$ cum secundo $-2e$, invenietur v ∞ $e + \frac{1}{2}r$, vel v ∞ $y + \frac{1}{2}r$. E quibus manifestum fit, ad ducendam rectam P C, opus tantùm esse, dividere latus rectum A D bifariam in puncto I, atque deinde assumere P M ipsi A I seu I D æqualem.



Quòd si verò ipsa tangens C T sit investiganda, poterimus, ut ante, supponendo latus rectum ∞ r, C M ∞ x, & M A ∞ y, quærere A T ∞ v, & A S ∞ f, hoc pacto:

Fiat

Fiat propter similitudinem triangulorum A S T & M C T, ut A T ad A S, hoc est, v ad s, sic M T, hoc est, $y + v$, ad M C. Quæ ideo erit $\frac{sy + sv}{v}$. Unde cum & M C sit $\propto x$, erit $\frac{sy + sv}{v} \propto x$. Hoc est, ductâ utrâque parte in se quadratè, habebitur $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \propto xx$. Quoniam autem, multiplicatâ M A per latus rectum, rectangulum ry, quod inde fit, similiter ipsi xx, hoc est, quadrato ex M C est æquale: erit pariter $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \propto ry$. Unde ordinatâ æquatione, terminisque omnibus ad unam partem transpositis, fit $yy \begin{smallmatrix} +2v \\ -\frac{vvr}{ss} \end{smallmatrix} y + vv \propto 0$. Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \propto 0$, conferendo singulos terminos unius cum singulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur $vv \propto ee$, hoc est, $v \propto e$. Ac proinde si in locum e substituatur y: fiet $v \propto y$. Id quod ostendit, ad ducendam rectam C T ad datum punctum C, opùs tantummodo esse assumere A T æqualem A M, atque connectere puncta C & T.

Quòd si autem quæratur A S, poterimus secundum terminum cum secundo comparare, subrogando y in locum v, ut & y in locum e: invenieturque $s \propto \frac{1}{2}\sqrt{ry}$.

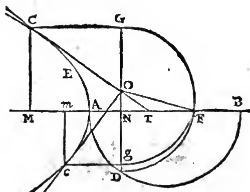
Eodem modò procedendo in binis reliquis sectionibus, invenietur in Ellipsi $v \propto \frac{qy}{q - 2y}$ & $s \propto \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q - y}}$; at in Hyperbola $v \propto \frac{qy}{q + 2y}$, & $s \propto \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q + y}}$.

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta T C sit ducenda: oportet duntaxat, assumptâ quantitate v ceu datâ, quærere y, reliquis manentibus invariatis. Ac proinde, cum in Parabola v & y æquentur, opùs tantùm erit accipere M A æqualem A T, &, ductâ M C ordinatim adplicatâ ad M A, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæsita.

Quoniam vero in Ellipsi v æquatur $\frac{qy}{q - 2y}$, multiplicando utrinque per $q - 2y$, fiet $qv - 2vy \propto qy$, seu $qy + 2vy \propto qv$. Adeoque si dividatur utrobique per $q + 2v$, invenietur M A $\propto y \propto \frac{qv}{q + 2v}$.

Pari

Pari ratione si quæratur MA in Hyperbola erit ipsa $\infty \frac{qv}{q-2v}$. Ubi liquet, ad ducendam ex puncto T rectam TC, quæ tangat Hyperbolam AEC, quantitatem v sive lineam AT minorem semper debere dari quàm $\frac{1}{2}q$, hoc est, minorem semisse lateris transversi, cum aliàs propter Asymptotos Problema hoc impossibile sit futurum. Quæ determinatio, cum in Parabola & Ellipsi nullum locum habeat, ostendit, quòd in duabus hisce sectionibus ejusmodi Asymptotæ non sint suspiciendæ; sed in iis ex omni puncto, ubi libet in producta MA assumpto, rectas duci posse, quæ easdem sectiones contingant.



Ad hæc, si ex puncto O, extra axem vel diametrum dato, rectam lineam ducere velimus, ut OC, quæ Parabolam CE contingat: ponatur, ut supra, latus rectum ∞ r, MA ∞ y, MC ∞ x, AN ∞ a, & NO ∞ b, eritque ex jam inventis MT ∞ $2y$ & NT ∞ $y-a$.

Deinde cum propter similitudinem triangulorum MCT & NOT, MC ad MT, hoc est, x ad $2y$, sicut NO ad NT, hoc est, b ad $y-a$: erit $xy-ax$, productum sub extremis, æquale $2by$, producto sub mediis. Quoniam verò ex natura Parabolæ, ry, ut supra, æquatur xx, hoc est, dividendo utrinque per r, y est æqualis $\frac{xx}{r}$: hinc si in æquatione inventa $xy-ax \infty 2by$ in locum y substituamus $\frac{xx}{r}$, habebimus

mus $\frac{x^3}{r} - ax \infty \frac{2bxx}{r}$. Hoc eſt, dividendo ubique per x, & multiplicando per r, invenietur $xx - ar \infty 2bx$, ſeu $xx \infty 2bx + ar$. Quæ eſt æquatio primi caſus quadratarum pag. 6 & 7, admittens unam veram radicem, quæ eſt $b + \sqrt{bb + ar}$, & unam falſam, ſeu minorem quàm nihil, quæ eſt $b - \sqrt{bb + ar}$. Sicut ibidem annotavimus. Cujus utriuſque uſus porrò hîc eleganter elucet.

Nam ſi ad ducendam O C, aſſumptâ N B æquali r, hoc eſt, ∞ lateri recto Parabolæ, ſuper totâ A B deſcribatur ſemicirculus, ſecans O N productam in D: erit N D $\infty \sqrt{ar}$. Quâ poſitâ ab N ad F, ſi jungatur O F, erit ipſa $\infty \sqrt{bb + ar}$. Ac proinde ſi centro O intervallo O F circulus deſcribatur, ſecans N O hinc inde productam in punctis G, g, deſignabit N G verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$, & N g valorem falſum $b - \sqrt{bb + ar}$. Vnde ducendo ex punctis G, g rectas G C, gc, ipſi A M parallelas, donec Parabolæ occurrant: obtinebuntur duo ſimul puncta C, c in quibus rectæ ex O ducendæ eandem contingent.

Simili modo in reliquis ſectionibus eſt procedendum.

Eſto C E prima Conchoïdes Veterum, cujus Polus G, norma verò vel regula, cujus ope ducta eſt, ſit A B; ita ut rectæ omnes, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E & rectam A B continentur, (ut A E, L C) ſint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut C P), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos ſecet in dato puncto C.] N *In Conchoide.*

C E M D L B A F G H I P

Notandum hîc, quòd, ſi per præcedentem methodum quæratur punctum

ctum in recta A B, per quod quæsita linea C P transire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licèt constructio sit valde brevis. *Oportet enim tantùm in recta C G sumere C D, æqualem C B, quæ perpendicularis est ad A B; & deinde ex puncto D rectam ducere D F, parallelam ipsi A G, atque æqualem G L: habebiturque hâc ratione punctum F, per quod quæsita linea C P erit ducenda.*] Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò est brevior, si in recta A G quæratur punctum P, per quod linea quæsita C P transire debet, quàm si quæratur in recta A B, atque etiam constructio allata ex illo faciliùs potest ostendi: visum fuit breviorem hîc subjungere, atque constructionem ex eo patefacere.

Esto ergo G A $\infty\ b$, A E vel L C $\infty\ c$, C M vel A B $\infty\ x$, M A vel B C $\infty\ y$, A P $\infty\ v$, & P C $\infty\ s$; eritque tota P M $\infty\ v+y$. Cujus quadratum $vv+2vy+yy$ si subtrahatur à quadrato rectæ P C $\infty\ ss$, relinquetur quadratum rectæ C M $\infty\ ss-vv-2vy-yy$. Vnde cum C M sit $\infty\ x$, & quadratum ejus $\infty\ xx$: erit $xx\ \infty\ ss-vv-2vy-yy$.

Eodem modo, si in triangulo rectangulo B C L à quadrato ex L C $\infty\ cc$ auferatur quadratum rectæ B C $\infty\ yy$, relinquetur quadratum rectæ B L $\infty\ cc-yy$: adeoque ipsa B L $\infty\ \sqrt{cc-yy}$: quâ ab A B $\infty\ x$ sublatâ, restabit A L $\infty\ x-\sqrt{cc-yy}$.

Iam verò, cum, propter similia triangula G M C & G A L, G M sit ad M C, hoc est, $b+y$ ad x, sicut G A ad A L, hoc est, b ad $x-\sqrt{cc-yy}$: erit rectangulum sub extremis æquale rectangulo sub mediis, nimirum

$bx+xy-\sqrt{bbcc+2bccy\,{-bb \atop +cc}\,yy-2by^3-y^4}\ \infty\ bx$. & deletis utrobique bx, ordinataque æquatione:

$xy\ \infty\ \sqrt{bbcc+2bccy\,{-bb \atop +cc}\,yy-2by^3-y^4}$. Deinde ut evanescat signum radicale, ducatur utraque pars in se quadratè, atque ad tollendum xx substituatur ejus loco $ss-vv-2vy-yy$, fietque æquatio $ssyy-vvyy-2vy^3-y^4\ \infty\ bbcc+2bccy\,{-bb \atop +cc}\,yy-2by^3-y^4$. Vbi si utrinque auferatur y^4, & fiat transpositio ut quantitates in y^3 ductæ unam obtineant æquationis partem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per $2v - 2b$, orietur æquatio talis:

$$y^3 \infty \frac{\begin{array}{l}+bb\\-cc\\+ff\\-vv\end{array} yy - 2bccy - bbcc}{2v - 2b}.$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, erit:

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v - 2b} \infty 0.$$

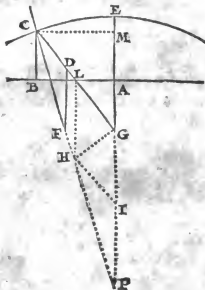
Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, postquam in ipsa quantitas y est data, quandoquidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates v & f, determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquè multas habeat dimensiones, & in qua y duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideoque supponendo $y \infty e$, sive $y - e \infty 0$: duco $y - e$ in se, & fit $yy - 2ey + ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y + f$, ut ascendat ad aliam trium dimensionum, ejusdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio $y^3 \begin{array}{l}+f\\-2e\end{array} yy \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y + eef \infty 0$. Cujus terminos separatim confero cum terminis præcedentis

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v - 2b} \infty 0.$$

Vnde cum primus terminus in utraque æquatione sit idem, comparo secundum cum secundo, ac reliquos cum reliquis. Adeò ut, si statuamus $\frac{bbcc}{2v - 2b} \infty eef$, & utrinque dividamus per ee, oriatur $f \infty \frac{bbcc}{2vee - 2bee}$. Pari ratione, si $\frac{+2bccy}{2v - 2b} \infty \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y$, seu $\frac{bcc}{v - b} \infty -2ef + ee$, in locum f subrogetur valor ejus inventus

$\frac{bbcc}{2vee-2bce}$: habebitur $\frac{bcc}{v-b} \infty \frac{-bbcc}{2ve-2be} + ee$, hoc est, sub eodem denominatore $\frac{-bcce}{ve-be} \infty \frac{+bbcc+be^3-e^3v}{ve-be}$. Et omisso denominatore, adhibitaque decenti transpositione, ut quantitas e^3v unam constituat æquationis partem, reliquæ verò alteram; dividatur utrinque per e^3, invenieturque $v \infty b + \frac{bcc}{ee} + \frac{bbcc}{e^3}$. Sive, substituendo y in locum quantitatis suppositæ e, $v \infty b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Eodem modo si reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s. Quia verò quantitas inventa v satis determinat punctum P, quod modò in recta A G quærebatur; & tantùm ab invento puncto P rectam lineam P C ducere oportet, ut quæstioni satisfiat: ulteriori operationi incumbere supervacaneum fuerit.



Vt verò ad demonstrationem supra dictæ constructionis accedamus, producatur inventa linea C F donec secet A G productam in P, atque per L agatur recta L H parallela A G, occurrens ipsi P C in H: unde ductâ H I ipsi C G parallelâ, quæ secet A P in I; Dico A P seu v æqualem esse inventæ quantitati $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Cum enim, propter similitudinem triangulorum B C L, A G L, B C sit ad C L, hoc est, y ad e, sicut A G, hoc est, b, ad G L: erit G L $\infty \frac{bc}{y}$. Deinde, quia, propter similia triangula C D F & C L H, C D ∞ y est ad D F seu G L $\infty \frac{bc}{y}$, sicut C L ∞ c ad L H: erit

erit L H $\infty \frac{bcc}{yy}$. Denique, cum, ob similia triangula C D F, H I P, C D sit ad D F seu G L, hoc est, y ad $\frac{bc}{y}$, sicut H I seu G L, hoc est, $\frac{bc}{y}$, ad I P: erit I P $\infty \frac{bbcc}{y}$. Quare si ducatur recta G C, in eaque assumatur C D æqualis C B, ac deinde ex puncto D recta agatur D F æqualis G L, & parallela A G: manifestum est, rectam, quæ puncta F, C, connectit, esse lineam quæsitam, quippe quæ Conchoïdem secat ad angulos rectos. Quandoquidem, si producatur ad P, G I fit $\infty \frac{bcc}{yy}$, I P $\infty \frac{bbcc}{y^3}$, atque adeò tota A P $\infty\ b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$. Quod erat faciendum.

Porrò, ut constructio adhuc brevior evadat, operæ pretium est considerare, rectam ab H ad G ductam ipsi G C esse perpendicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum, deinde sic verum deprehendi:

Quoniam enim L H ipsi A G est parallela, erit angulus H L G æqualis angulo L G A. Deinde, quoniam G A $\infty\ b$ multiplicata per L H $\infty \frac{bcc}{yy}$ facit $\frac{bbcc}{yy}$, quadratum ipsius G L, quæ est $\frac{bc}{y}$: erit A G ad G L, sicut G L ad L H. Vnde cum in triangulis A G L, L G H latera circa æquales angulos ad G & L sint proportionalia, erunt itidem anguli G A L & L G H æquales. Est autem G A L rectus. Quare & L G H rectus erit.

Hinc talis emergit constructio:

Ductâ C G, secante A B in L, agatur ex L ipsi A G parallela L H, donec occurrat perpendiculari G H in H: eritque recta H C, quæ ex H per C ducitur, secans quæsita.

Non dissimili ratione invenire licet constructionem exempli pag. 47.

Verùm enimverò quoniam lineæ C P alio quoque modo investigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Consiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui Mathematici exemplis aliquot illustravit, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, si

hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti calculo exposuero.

Esto, ut supra, $GA \infty b$, AE vel $LC \infty c$, $AM \infty y$, & $PA \infty v$: eritque $GM \infty b+y$, & $PM \infty v+y$. Deinde quæro quadratum ex PC, supponendo illud esse minimum quadratorum omnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pacto:

$$\begin{array}{cccc} AM & LC & GM & GC \\ y & c & b+y, \text{ ad} & \frac{bc+cy}{y} \\ & & & \frac{bc+cy}{y} \end{array}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square GC. \ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \\ \square GM. \ bb+2by+yy \end{cases}$$

$$\square MC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by - yy$$

$$\text{add. } \square PM. \ vv+2vy+yy$$

$$\text{fit } \square PC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by + vv + 2vy.$$

Hoc autem ut sit minimum, positâ jam $AM \infty y+e$, quæratur rursus, ut ante, quadratum ex PC, quò obtineatur æquatio inter id ipsum bis inventum, quâ innotescat quæsita quantitas v, supponendo e esse ∞ o.

$$\begin{array}{cccc} AM & LC & GM & GC \\ y+e & c & b+y+e, \text{ ad} & \frac{bc+cy+ce}{y+e} \\ & & & \frac{bc+cy+ce}{y+e} \end{array}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square GC. \ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} \\ \square GM. \ bb+2by+yy+2be+2ey+ee \end{cases}$$

$$\square CM. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - yy - 2be - 2ey - ee.$$

$$\text{add. } \square PM. \ vv+2vy+yy+2ve+2ey+ee$$

$$\square PC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - 2be + vv + 2vy + 2ve.$$

Hinc

Hinc dempto utrobique $-bb - 2by + vv + 2vy$, remanebit $\frac{bbcc + 2bccy + ccyy}{yy}$

$$\infty \frac{bbcc + 2bccy + ccyy + 2bcce + 2ccey + ccee}{yy + 2cy + ee} - 2be + 2ve, \text{ seu}$$

$$\frac{bbcc + 2bccy + ccyy + 2bcce + 2ccey + ccee - 2beyy - 4beey - 2be^3 + 2evyy + 4eevy + 2e^3v}{yy + 2cy + ee}.$$

Hoc est, multiplicato per crucem, erit $bbccyy + 2bccy^3 + ccy^4 + 2bbccey + 4bcceyy + 2ccey^3 + bbccee + 2bcceey + cceeyy \infty bbccyy + 2bccy^3 + ccy^4 + 2bcceyy + 2ccey^3 + cceey - 2bey^4 - 4beey^3 - 2be^3yy + 2evy^4 + 4eevy^3 + 2e^3vyy$. Ac proinde sublatis utrinque æqualibus, restabit $2bbccey + 2bcceyy + bbccee + 2bcceey \infty - 2bey^4 - 4beey^3 - 2be^3yy + 2evy^4 + 4eevy^3 + 2e^3vyy$. Diviso jam ubique per e, reserventur quantitates in v ductæ ad unam partem, fietque, translatis reliquis, $2vy^4 + 4evy^3 + 2eevyy \infty 2bbccy + 2bccyy + bbcce + 2bccey + 2by^4 + 4bey^3 + 2beeyy$. Vnde neglectis iis, quæ in e aut ee ductæ sunt, obtinebitur $2vy^4 \infty 2bbccy + 2bccyy + 2by^4$. Et fit, dividendo utrinque per $2y^4$, $v \infty \frac{bbcc}{y^3} + \frac{bcc}{yy} + b$. ut ante. Vbi sciendum, calculum multò abbreviari posse, si in secunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 ascenditur, continuè omittantur.

Atq; hæc quidem via est, quam & Hugenium secutum fuisse confido, prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius ope hujus ipsius Methodi quæsivisse mihi asseveravit. Quam viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex P C, cum subtilissimo ac sæpiùs laudato nostro Huddenio secundam hanc operationem omnino insuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipsius y dimensiones multiplicare, invertendo porrò signa + & — quantitatum, per y & yy divisarum. Perinde, ut hîc videre est.

□P C. $\frac{bbcc}{yy} + \frac{2bcc}{y} + cc - bb - 2by + vv + 2vy \infty ss$

Mult. per 2   1   1   1

$$-\frac{2bbcc}{yy} - \frac{2bcc}{y} - 2by + 2vy \quad \infty \quad 0$$

$$2vy \infty \frac{2bbcc}{yy} + \frac{2bcc}{y} + 2by$$

Et fit $v \infty \frac{bbcc}{y^3} + \frac{bcc}{yy} + b$. ut ante. Atque ita de aliis.

Cæte-

Cæterùm quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium sive secantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum solutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeò multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his sit æquiparandus: quippe is non tantùm Maximi aut Minimi determinationem, cùm quæstio non nisi unum tale agnoscit, exhibere valet; sed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium simplicissimâ elicere novit.

Ad hæc si superiori modo ipsam tangentem Conchoïdis C T investigare lubeat, ponatur, ut ante, G A $\infty\, b$, A E vel L C $\infty\, c$, C M vel A B $\infty\, x$, M A vel B C $\infty\, y$, E T $\infty\, v$, & E S $\infty\, s$: eritque M E $\infty\, c - y$, & M T $\infty\, c - y + v$. Tum fiat, propter similitudinem triangulorum S T E & C T M, ut T E ad E S, hóc est, v ad s, ita T M, hoc est, $c - y + v$, ad M C. $\frac{cs - sy + sv}{v} \infty\, x$. Hinc cum & supra inventum sit $xy \infty \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}$, id est, dividendo utrinque per y,

$x \infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$: erit $\frac{cs - sy + sv}{v}$

$\infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$. Unde quadratis singulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$y^4 \infty \frac{\begin{array}{llll} +2cssy^3 & +ccvvyy & +2bccvvy & +bbccvv \\ +2vss & -bbvv & & \\ -2bvv & -ccss & & \\ & -2cvss & & \\ & -vvss & & \end{array}}{ss + vv}.$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, habebitur

$$\frac{\begin{array}{lllll} y^4 & -2cssy^3 & -ccvvyy & -2bccvvy & -bbccvv \\ & -2vss & +bbvv & & \\ & +2bvv & +ccss & & \\ & & +2cvss & & \\ & & +vvss & & \end{array}}{ss + vv} \infty\, 0.$$

Deinde, ad inveniendas quantitates v & s, positâ $y \infty\, e$, seu $y - e \infty\, 0$,

$\propto o$, multiplico $y - e \propto o$ per $y - e \propto o$, & fit $yy - 2ey + ee \propto o$. æquatio duas habens radices æquales. Quam porrò, ut ad æquè-multas cum præcedente dimenſiones aſcendat ac ejuſdem cum illa ſit formæ, multiplico per $yy - fy - gg$, & provenit

$$\begin{array}{lllll} y^4 - 2ey^3 & + eeyy & - eefy & - eegg & \propto o. \\ \quad - f & + 2ef & + 2egg & & \\ & - gg & & & \end{array}$$

Cujus itaque terminos ſeparatim comparo cum terminis præcedentis. Vltimus terminus, qui hîc eſt quintus, dat $gg \propto \frac{bbccvv}{ccss + eevv}$, quartus dat $f \propto \frac{2bbccvv + 2bccevv}{c^3 ss + c^3 vv}$, tertius dat $ss \propto \frac{3bbccvv + 4bcccvv + e^4 vv + ccccvv - bbcevv}{ccee + 2ceev + ccvv - e^4}$, & ſecundus dat

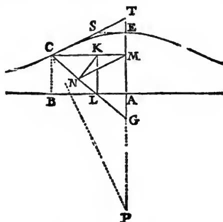
$$vv \propto \frac{e^3 ssv + ce^3 ss - e^4 ss}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce.}$$

Quocirca, ut obtineatur v, ſi ipſius ss valor jam inventus multiplicetur per $\frac{e^3 v + ce^3 - e^4}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce}$, abbreviando priùs, ad facilitatem operationis, numeratorem prioris & denominatorem poſterioris fractionis per $e + b$, ac deinde denominatorem prioris & numeratorem poſterioris fractionis per $eev + cee - e^3$, exurget $e^4 - be^3 + ccee + 3bcce \propto e^4 + e^3 v + ce^3 + bcce + bccv + bc^3$. Fietque, ordinatâ æqualitate, $v \propto \frac{-bc^3 + 2bcce + ccce - be^3 - ce^3}{bcc + c^3}$. Seu, quia y eſt $\propto e$, erit $v \propto \frac{-bc^3 + 2bccy + ccyy - by^3 - cy^3}{bcc + c^3}$.

Denique, inventâ quantitate v, facile eſt invenire quantitatem s. Si enim in ſuperiori æquatione $\frac{cs - sy + sv}{v} \propto \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$ in locum v ſubrogetur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$$s \propto \frac{-bcc + bcy + cyy + byy}{y^4 + by^3 + cy^3 + bcyy} \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}.$$

Quod ad conſtructionem hujus attinet, quoniam ipſa, quam inveni, haud inconcinna mihi eſt viſa, placuit eam hîc paucis ſubnectere.



Ductâ ex C super G E perpendiculari C M, agatur G C, secans A B in L; & ex L ducatur L K parallela G E, occurrens ipsi C M in K. Deinde ex K demissâ K N perpendiculari ad C G, jungatur N M: eritque C T huic parallela tangens quæsita.

Quibus explicatis facile etiam est hîc ostendere, quonam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à se invicem distinguit, investigari queat. De quo egit Nobilissimus D. Hugenius ultimo Problematum Illustrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione

$$\frac{\begin{array}{lllll} y^4 & -2cff\,y^3 & -ccvv\,yy & -2bccvv\,y & -bbccvv \\ & -2vff & +bbvv & & \\ & +2bvv & +ccff & & \\ & & +2cvff & & \\ & & +vvff & & \end{array}}{vv+ff} \propto 0,$$

quoniam ex puncto T, utcunque in producta G E accepto, nulla recta duci potest, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, seu postquam est producta, hanc ipsam in alio puncto non secat, exceptâ tantùm rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admit-

tat

tat radicis valores, qui omnes inter se sint æquales. Quod ipsum ut fiat, confero æquationem superiorem cum æquatione $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 \infty 0$, in qua y tres habet valores æquales, qui singuli sunt ∞e. Hanc autem, ut ad æquè multas dimensiones ascendat, & ejusdem cum præcedenti sit formæ, multiplico per $y+f$, & prodit æquatio

$$y^4 \begin{smallmatrix} -3e \\ +f \end{smallmatrix} y^3 \begin{smallmatrix} +3ee \\ -3ef \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -e^3 \\ +3eef \end{smallmatrix} y - e^3 f \infty 0.$$

Cujus termini si cum alterius terminis comparentur, invenientur inde $f \infty \frac{bbccvv}{e^3 ff + e^3 vv}$, $ff \infty \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{2bccvv}{e^3} - vv$, $v \infty \frac{bbec + 2bcee + cccc}{3bcc - 3bee} - b - c$, & $e^3 \infty -3bee * + 2bcc$, seu, quia y est ∞e, $y^3 \infty -3byy * + 2bcc$.

Quoniam autem hæc æquatio Cubica est, neque ad Quadratam reduci potest, superest ut valorem radicis y per sectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores construi etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ sunt superiorum generum, non ingratum fore judicavi, si hîc ulteriùs exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis C E Problema propositum solvi possit, sic ut ad constructionem ejus non nisi regula atque circino utamur, haud secus ac si Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditissimo ac præstantissimo Viro-Iuvene D. Henrico van Heuraet, Harlemo-Batavo, inventum fuit, mihique ab eo communicatum.

Esto, ut ante, G A ∞b, A E vel L C ∞c, B C vel A M ∞y, & A T ∞z. Vnde ut suprà pro A P invenietur $\frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$.

$$\begin{array}{rl} \text{add. A M.} & y \\ \hline \text{P M.} & \frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3} \\ \text{M T.} & z - y \\ \hline \end{array}$$

$$\square\,\text{P M T.}\ \frac{-y^5 \begin{smallmatrix} +z \\ -b \end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix} +bccz \\ -bbcc \end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}$$

Est autem $\square$ C M. $\frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix} -bb \\ +cc \end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$.

Erit itaque $\dfrac{-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}$

$$\infty \frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$$

$$-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty -y^5 - 2by^4 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} y^3 + 2bccyy + bbccy$$

$$\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}+bz\\+bb\\-cc\end{smallmatrix} y^3 - 3bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-2bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty 0$$

div. per $y+b$. fit $\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^3 - ccyy - 2bccy + bccz \infty 0$. Hæc æquatio duas habet veras radices, quippe quæ ad duas tangentes, ex eodem puncto ad utramque portionem ductas, pertinent; quæ si æquales fuerint, tanget T C utramque portionem in eodem puncto.

$$\begin{array}{l} y - e \\ y - e \\ \hline yy - 2ey + ee \infty 0 \\ y + g \\ \hline y^3 - 2eyy + eey + eeg \infty 0 \\ \quad + g \quad\;\; - 2eg \end{array}$$

$$\frac{-cc}{z+b} \infty -2e + g$$

$$g \infty 2e - \frac{cc}{z+b}$$

$$\frac{bccz}{z+b} \infty eeg$$

dele g. $\dfrac{bccz}{z+b} \infty 2e^3 - \dfrac{ccee}{z+b}$

$$bccz \infty 2ze^3 + 2be^3 - ccee$$

$$2ze^3 + 2be^3 - ccee - bccz \infty 0$$

Mult. per 3. $6ze^3 + 6be^3 - 3ccee - 3bccz \infty 0$

$$\frac{-2bcc}{z+b} \infty ee - 2eg$$

dele g. $-\dfrac{2bcc}{z+b} \infty ee - 4ee + \dfrac{2cce}{z+b}$

$$-2bcc \infty -3zee - 3bee + 2cce$$

$$3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$$

Mult. per 2e. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

subtr. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

div. per cc. $ccee + 4bcce - 3bccz \infty 0$

$$ee + 4be - 3bz \infty 0$$

Mult. per $3z + 3b$.

$$3zee + 3bee + 12bze + 12bbe - 9bzz - 9bbz \infty 0$$

subtr. $3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$

$$12bze + 12bbe + 2cce - 9bzz - 9bbz + 2bcc \infty 0$$

$$12bze + 12bbe + 2cce \infty 9bzz + 9bbz - 2bcc$$

$$e \infty \frac{9bzz + 9bbz - 2bcc}{2cc + 12bz + 12bb}.$$

Igi-

Igitur si in æquatione $ee + 4be - 3bz \infty 0$ in locum e substituatur hic valor inventus, habebitur:

$$\begin{array}{l} 81bbz^4 + 162b^3z^3 - 108bbcczz - 204b^3ccz - 12bbc^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 81b^4 \quad\; - 12bc^4 \;\; - 96b^4cc \end{array} \infty 0$$

div. per $3b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^4 + 54bbz^3 - 36bcczz - 68bbccz - 4bc^4 \\ \qquad\qquad\qquad + 27b^3 \quad\; - 4c^4 \;\; - 32b^3cc \end{array} \infty 0$$

div. per $z + b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^3 + 27bbzz - 36bccz - 32bbcc \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4c^4 \end{array} \infty 0$$

div. per $27b$.

$$\text{Et fit } z^3 + bzz - \tfrac{4}{3}ccz - \frac{32bbcc - 4c^4}{27b} \infty 0.$$

Iam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoïdis solvatur, ponatur $GA \infty b$

$AE \infty c$ Tum fiat, ut sequitur.

$AT \infty x$

$TC \infty y$

& $AM \infty z$, eritque $MT \infty x - z$.

subtr. $\left\{\begin{array}{l} \square\, CT.\; yy \\ \square\, MT.\; xx - 2xz + zz \\ \hline \square\, CM.\; yy - xx + 2xz - zz \infty \end{array}\right.$ $\square$ CM. Ex natura Conchoïdis. $\dfrac{-z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc}{zz}$

$$yyzz - xxzz + 2xz^3 - z^4 \infty -z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc$$

$$\begin{array}{l} +2x \\ +2b \end{array} z^3 \begin{array}{l} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{array} zz - 2bccz - bbcc \infty 0$$

div. per $2x + 2b$.

$$\text{Et fit } z^3 \; \frac{\begin{array}{l} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{array} zz - 2bccz - bbcc}{2x + 2b} \infty 0$$

Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis sint comparandi, & quidem ad inveniendas quantitates x & y tres essent æquationes quærendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus sit ad quartum, sicut tertius hujus est ad quartum. In quem finem secundum illius terminum multiplico

 per

per $\frac{9bb}{16bb+2cc}$, & tertium per $\frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$. Omnino ut hîc videre eſt.

$$z^3+bzz-\tfrac{4}{3}ccz + \text{\&c.} \quad \infty \; 0$$
$$\frac{9bb}{16bb+2cc} \qquad \frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$$

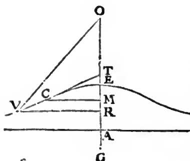
$$z^3+\frac{9b^3}{16bb+2cc}zz-\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}z - \text{\&c.} \infty 0.$$

$$\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4} \infty \frac{bcc}{x+b} \qquad \frac{9b^3}{16bb+2cc} \infty \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b}$$

$$\frac{27b^3}{64b^4+16bbcc+c^4} \infty \frac{1}{x+b} \qquad \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc} \infty yy-xx+bb-cc$$

$$27b^3x+27b^4 \infty 64b^4+16bbcc+c^4 \qquad yy \infty \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb$$

$$x \infty \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3}-b. \qquad y \infty \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}.$$



Igitur ſumendo in axe lineam A O $\infty \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3}-b$, eamque vocando x, ſi ex puncto O intervallo O V $\infty \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}$ arcus Circuli deſcribatur, atque ex ſectionis puncto V ducatur ad A O perpendicularis V R: erit A T, quæ ſe habet ad A R, ut $16bb+2cc$ ad $9bb$, inventæ æquationis radix. Vnde facile eſt invenire lineam A M. Oſtenſum enim eſt $yy+4by-3bz \infty 0$.

Denique cum inventio ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, non tantùm ad inveniendas tangentes aut ſecantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expoſitum, adhiberi poſſit; ſed ipſa generalis ſit atque infinitis aliis Problematis reſolvendis, ut Author aſſerit, inſervire queat: haud inutile fuerit hîc ulteriùs quoque exponere, quo pacto illam ad Maximi aut Minimi determinationem applicari poſſe deprehendi, proponendo in eum finem ſequentia Problemata.

Datam



Datam rectam lineam A C ſecare in puncto B, ut parallelepipedum, quod ſit ſub quadrato unius partis A B & altera parte B C, ſit omnium parallelepipedorum, ſic factorum, maximum.

Eſto A C ∞ a, & A B ∞ x: eritque B C ∞ $a-x$. Deinde maximum ſolidum, cui parallelepipedum quæſitum ſtatui poteſt æquale, eſto b^3. Quibus ſic poſitis, ſi quadratum ex A B ∞ xx multiplicetur per B C ∞ $a-x$, proveniet $axx - x^3 \infty b^3$, ſeu $x^3 - axx^* + b^3 \infty 0$. Iam factâ $x \infty e$, ſeu $x - e \infty 0$, multiplico $x-e$ per $x-e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam porrò, ut ejuſdem ſit formæ cum præcedente, multiplico per $x+f$, & exurgit $x^3 \begin{smallmatrix}-2e\\+f\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+ee\\-2ef\end{smallmatrix} x + eef \infty 0$. Ex quarum mutua inter ſe collatione eliciuntur hæ tres æquationes $-2e+f \infty -a$, $+ee-2ef \infty 0$, & $eef \infty b^3$: quæ reſolutæ dant $f \infty \frac{1}{2}e$, e ſeu $x \infty \frac{2}{3}a$, & $b^3 \infty \frac{4}{27}a^3$. Quod ipſum docet, ad ſecandam lineam A C, qualis requiritur, eandem in B ita eſſe dividendam, ut A B ipſius A C contineat duas tertias partes; & maximum ſolidum, cui parallelepipedum quæſitum adæquari poteſt, eſſe $\frac{4}{27}a^3$.

Dividere p planum in tria plana proportionalia, ita ut ſolidum, quod fit ex ductu ſummæ duorum priorum in latus ſecundum vel duorum poſteriorum in latus primum, ſit omnium maximum.

Aſſumptis ad hoc x pro latere primo, & y pro latere ſecundo, fient inde proportionalia plana xx. 1[mum]
xy. 2[dum]
yy. 3[tium].

Et manifeſtum eſt, $xxy + xyy$, quod fit ex $xx + xy$, ſummâ duorum priorum planorum, in latus ſecundum y, eſſe æquale ei, quod fit ex $xy + yy$, ſummâ duorum poſteriorum planorum, in latus primum x. Supereſt ut $xxy + xyy$ ſit omnium ejuſmodi ſolido-

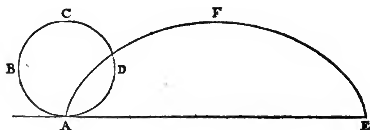
lidorum maximum. Quoniam autem $xx + xy + yy$ est $\infty\, p$

$$\text{vel } yy \infty p - xx - xy$$
$$\text{mult. per } x \qquad x$$
$$\text{vel etiam } xyy \infty px - x^3 - xxy:$$

Hinc si pro xyy dicti solidi $xxy + xyy$ substituatur $px - x^3 - xxy$, habebitur $px - x^3$. Quocirca ut $px - x^3$ fiat maximum solidum, quod esse possit, intelligatur ipsum æquale solido q: eritque $x^3 * - px + q \infty 0$. Deinde factâ $x \infty e$ seu $x - e \infty 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam rursus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per $x + 2e$, & exsurgit $x^3 * - 3eex + 2e^3 \infty 0$. Ex quibus binis æquationibus, si singuli termini unius cum singulis terminis alterius comparentur, elicio $x \infty \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, & $q \infty \tfrac{2}{3}p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Eodem modo invenitur $y \infty \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Quod ipsum monstrat, ad dividendum p planum in tria plana proportionalia, maximum solidum, quod ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel ex ductu duorum posteriorum in latus primum gignitur, esse illud, quod obtinetur dividendo p planum in tria plana æqualia. Et sic de aliis.

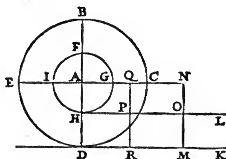
Cæterùm, cum allatis exemplis satis superque sit ostensum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri possint, secantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Mersenno per literas ostendit in curva, quæ Cycloïdes sive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clarissimus Euangelista Toricellius, scribit à Galilæo Galilæi, prædecessore suo, primùm fuisse consideratam; cujusque ulteriori speculationi ipsum postea, ut & Virum Celeberrimum D. de Roberval, Mathematum in Academia Parisiensi Professorem Regium, se addixisse novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota sive circulo assumpti, super rectam aliquam lineam circumvoluti.

Vt



Vt si super recta linea A E circumvolvatur rota sive circulus A B C D, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E: describet punctum A hoc motu lineam curvam A F E, quæ Trochoïdes sive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam sive circulum assumpto, excepto tantùm ejus centro.

Iam ut in genere ostendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci possint, quæ hasce curvas secent in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Aristotele hîc explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum constituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas absolvant.



Sunt ergo duo circuli inæquales, major quidem B C D E; minor autem F G H I, idem habentes centrum A: sintque diametri majoris B D, E C; minoris verò F H & I G, sese ad angulos re-

 ctos

ctos secantes in A. ita ut quadrans circuli majoris sit C D; minoris verò G H. Iam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, simul circumvoluti, æquales lineas absolvant; concipiatur primùm majorem B C D E dextrorsum moveri super recta D K, & minorem F G H I ad motum illius describere lineam rectam ipsi D K parallelam, quæ sit H L. Unde manifestum, cùm punctum C pervenerit ad M, existente arcu D C æquali rectæ D M, semidiametrum quoque A C tunc fore perpendicularem super D K in M; ita ut coïncidat cum M N, hoc est, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris sit in recta A C: sequitur ipsum quoque post hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut semidiameter A G circuli minoris transferatur in N O. Adeò ut, N O æquali existente & parallelâ ipsi A H, ipsa quoque H O sit æqualis futura ipsi A N seu D M, & singulæ rectæ D M, H O separatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis est intelligendum.

Non secus ostendetur, si moveatur circulus minor F G H I super rectam H L, secum deferens circulum majorem B C D E, sibi affixum in centro A, lineas rectas æquales absolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante H G super rectam H L, ab H versus L; ita ut rectam lineam H P sibi æqualem percurrat: ducatur per P recta Q P R, secans rectam H L ad angulos rectos in P; sed A N & D K in Q & R. Quo facto, perspicuum est, cùm punctum G est in P, punctum quoque A esse in Q, rectamque A G super rectam Q P. Atque ideo, cum punctum C circuli majoris existat in linea A G producta, patet, illud post hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R, rectamque D R æqualem fore rectæ A Q seu H P, & singulas eodem temporis spatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi possit, ut rectam absolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus sit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de supra dicta linea A F E notandum, eam duobus motibus describi, inter se distinctis; recto nempe, quo circulus A B C D defertur ab A ad E; & circulari, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoïdem describit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipsi A E æqualem & parallelam.

Qui-

Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoïde datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.

Vt si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam sive Trochoïdem A B C, descriptam super basin A D per punctum aliquod circumferentiæ rotæ D N C, super basin A D circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere B N, parallelam basi A D; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam N D; tumque eidem parallelam B O; ac denique huic perpendicularem B L: Quæ erit tangens quæsita.

Cujus rei brevem atque simplicem demonstrationem affert. ut sequitur.

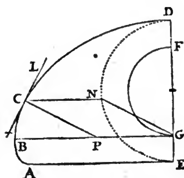
Si super rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum describitur, composita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad singula earum puncta normaliter secant lineas rectas, quæ ab ipsis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem describendo, basin contingit, ducuntur.

Exempli gratiâ, si faciamus ut volvatur Hexagonum A B C D super rectam E F G D, describet punctum ejus A, lineam curvam E H I A, compositam ex arcu E H, qui describitur, dum Hexagonum hoc contingit basin in puncto F (quod ejusdem arcus est centrum; & ex arcu H I (cujus centrum est punctum G); ut

& ex arcu I A (cujus centrum est punctum D): per quæ centra transeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accidat polygono centies millenorum millium, palàm est, idem convenire quoque Circulo.

Verba Authoris. Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ, elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hîc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo supersedebo. Notandum solummodo est, cùm basis hujus Trochoïdis æqualis est circumferentiæ rotæ, quam super eandem basin ad ejus descriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non absimilem figuram, referre: hoc est, quòd tangens utriusque ejus extremi puncti ad basin sit perpendicularis. Sed cùm minor est, quod tunc utraque extremitas introrsum sit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræsentent figuram





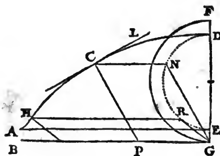
Ad cujus Trochoïdis tangentes inveniendas, atque sciendum ubi se involvere incipiat: imaginandum est, punctum D, à quo describitur, esse extra rotam. Deinde, duæ supponendæ sunt bases; una A E; supra quam Trochoïdes A B C D per punctum D est descripta; & altera B G, super quam rota F G secum deferens circulum D E sibi affixum circa ejus centrum est circumvoluta, cujusque semicircumferentia dimidiæ basi A E est æqualis. Vbi sciendum, tangentes inveniri per circulum D E & punctum G, ubi rota F G basin B G contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto C, opùs tantùm sit ducere C N parallelam basi A E, occurrentem cir-

circulo D E in puncto N; tum verò junctæ N G parallelam C P: quæ ipsi tangenti quæsitæ erit perpendicularis. Ita ut perspicuum sit, punctum B, ubi hæc secunda basis B G Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipsa se introrsum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad basin A E perpendicularis existit.

Denique si basis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per assumptum punctum, quod eam designat, circa rotæ centrum describitur: binæ extremitates extrorsum erunt inflexæ; ita ut complures ejusmodi linearum revolutiones hanc exhibeant figuram.



Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniantur, atque sciatur ubi se inflectere incipiat, imaginandum est, punctum, quod ipsam designat, esse intra rotam: adeoque secundam basin esse B G, supra quam rota F G, cujus circumferentia huic basi est æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum D, Trochoïdem designans, super primam basin A E describit circulum D E, circa rotæ centrum. Iam ut inveniatur linea, quæ ipsam in puncto C, utcunque in Trochoïde assumpto, tangat: ducatur C N parallela basi, occurrens circulo



D N E in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota F G basin suam contingit, ductâ rectâ N G, agatur ipsi parallela C P: eritque recta C L, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quæsita. Porrò ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio A H

 desi-

desinit esse concava, & H C D convexa, opùs tantùm est à puncto G rectam ducere G R, quæ tangat circulum D R E in puncto R; tum ab R rectam R H, parallelam basi, & occurrentem Trochoïdi in puncto H. Quod erit quæsitum.

Vbi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc A H C D tangat in puncto H: quandoquidem illud ipsum duas ejus portiones, quarum una est concava, & altera convexa, distinguit.

Deinde observandum, quòd ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem descriptarum, hîc allata sunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum describuntur.

Denique, quòd lineæ hæ sint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quòd tangentes earum non inveniantur per regulas ibi expositas, cum ad ipsas non referantur.

OO *Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.*] Notavit hîc Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cùm nempe F A ad A G eandem rationem habet, quam 5 A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse. Quod se apertiùs in tractatu de Dioptricis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus.

P *Et quod ex tali materia constet, ut vim horum radiorum, secundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futurum, ut etiam reflexionum anguli, non secus ac refractionum, inæquales existant, atque eodem modo mensurari possint.*] Hæc refer ad caput 2dum Dioptricæ, ubi demonstratum est, reflexionis angulum angulo incidentiæ esse æqualem: quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminuitur. Sicut per refractionem vis radii, transeundo ex uno corpore pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea angulos

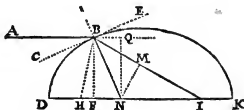
gulos facit inæquales. Adeò ut hinc sequatur: si speculum haberi possit, ex tali constans materia, ut vim radiorum, quos reflecteret, augeret aut diminueret (omnino ut ostendit, vitrum vim radiorum, quos in se recipit, augere, eorumque refractionis causam esse): essent reflexionum anguli non secus ac refractionum inæquales: & posset eorum ratio mensurari per rationem, quæ est inter lineas A 5 & A 6, supponendo illam eandem esse, quæ est inter vim alicujus radii antequam in speculum incideret, & inter vim, quam immediatè post obtineret, cum esset reflexus.

Cæterùm quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem diversimode detorquendos Sectiones Conicæ singularem habent usum, atque specula & vitra ad ipsarum figuram expolita miros effectus præbent: haud inopportunum fore duxi, si, tum ad penitiorem intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum ab Authore sunt ostensa, tum ad usum eorum, quæ de inveniendis tangentibus aut secantibus exposita sunt, deinceps hîc adjungerem, quo pacto in axe puncta investigari possint, in quibus radii Solis, postquam in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra transierunt, reflectuntur aut colliguntur.

Vt si fuerit speculum, habens figuram Parabolæ A E C, cujus axis sit M A, & vertex A: ad investigandum punctum I, ad quod radius Solis F C, qui ipsi M A est parallelus, reflectatur, postquam in idem speculum incidit in C, suppono, ut ante, latus rectum $\infty\ r$, M A $\infty\ y$, & I A $\infty\ z$. Quibus positis cum ex superioribus P M sit $\infty\ \frac{1}{2}r$, & A T sit ∞ A M seu y: erit P T $\infty\ \frac{1}{2}r + 2y$, & P I $\infty\ \frac{1}{2}r + y - z$. Quoniam autem propter æquales angulos incidentiæ & reflexionis F C H & I C T, ut & rectam P C ipsi tangenti H T perpendicularem, anguli quoque F C P & P C I sunt æquales; atque horum quidem angulus F C P angulo C P I sit æqualis: erunt pariter anguli P C I & C P I æquales; lineaque I G, ipsi P C perpendicularis, rectam P C bifariam

riam in G secabit. Quibus sic existentibus, cum & hinc P I ipsi I T sit æqualis, erit $r + 2y - 2z \infty \frac{1}{2}r + 2y$. Vnde, dempto utrinque $2y$, & reliquis per 2 divisis, invenitur $z \infty \frac{1}{4}r$. Quod ipsum, cum de quovis radio ipsi axi parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, radios Solis, axi parallelos, ubi in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, omnes ad idem axis punctum I reflecti, distans à vertice quartâ parte lateris recti.

Vnde porrò fit manifestum, cum lucente Sole, beneficio hujus speculi, prout ipsi directè est obversum, aliquid in I accendatur, quam ob rationem idem speculum ustorium dictum fuerit, punctumque I Foci nomine appellari consueverit.



Deinde si fuerit vitrum, habens formam Ellipsis D B K, cujus maxima diameter sit D K: ad investigandum quo modo radius A B, qui in aëre existens ipsi D K est parallelus, tendere debeat, postquam intravit ejus superficiem convexam, & in quo vitro refractiones sic fieri intelliguntur, ut, juxta ea, quæ in Diopticis tradita sunt, illæ omnes mensurari possint per rationem, quæ est inter lineas d & e, facio D H vel I K $\infty\, a$, H I $\infty\, z$, & D F $\infty\, y$, eritque H F $\infty\, y - a$ vel $a - y$, & F I $\infty\, a + z - y$ vel $y - a - z$. Quibus positis, si Ellipsis D B K descripta esse intelligatur ope fili H B I, haud secus ac illud Capite 8vo Dioptrices ab Authore aut etiam à nobis in Organica Conicarum Sectionum descriptione expositum fuit, erit, factâ B I $\infty\, x$, B H $\infty\, 2a + z - x$. Vnde jam facile est invenire quantitatem y, assumptis scilicet quantitatibus x & z, ut cognitis. Etenim si à quadrato B H. $4aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx$ tollatur quadratum H F. $yy - 2ay + aa$, restabit $3aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx + 2ay - yy$, pro quadrato B F. Similiter, si à quadrato B I. xx auferatur quadratum F I. $aa + 2az + zz - 2ay - 2zy + yy$, relinquetur etiam

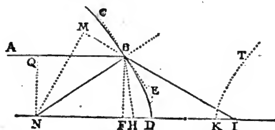
$xx -$

$xx - aa - 2az - zz + 2ay + 2zy - yy$, pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \infty \frac{2aa + 3az + zz - 2ax - xx}{z}$. Esto jam DN $\infty\, v$, & NB $\infty\, s$, eritque FN $\infty\, v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Si enim à quadrato BN. ss abstulero quadratum FN. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato BF. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium habebitur $y \infty \frac{ss - vv - xx + aa + 2az + zz}{2a + 2z - 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \infty \frac{\begin{array}{ll} -4avx & +\ ssz \\ -2vz & -\ vvz \\ +4aa & +4aav \\ +6az & +6avz \\ +2zz & +2vzz \\ & -4a^3 \\ & -9aaz \\ & -6azz \\ & -\ z^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut inveniantur quantitates v & s, positâ $x \infty s$, multiplicetur $x - s \infty 0$ per $x - s \infty 0$, & fit $xx - 2sx + ss \infty 0$, seu $xx \infty 2sx - ss$, æquatio ejusdem formæ cum præcedente. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, emergit v, hoc est, DN $\infty \frac{2aa + 3az + zz - xx}{2a + z}$. Quæ à DI seu $a + z$ ablata relinquit NI $\infty \frac{xx}{2a + z}$. Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter se rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK mensurant; & quidem FB ad NM sit, ut BI ad IN: superest ut d sit ad e, sicut x ad $\frac{zx}{2a + z}$. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $\frac{dzx}{2a + z} \infty ex$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu $z \infty \frac{2ae}{d - e}$. Cui si addantur DH & IK, hoc est, $2a$, habebitur

D K $\propto \frac{2ad}{d-e}$. Et patet D K ad H I esse, ut $2ad$ ad $2ae$, hoc est, ut d ad e. Quod ipsum, cum de quovis radio A B ipsi D K parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, ope vitri Elliptici D B K, in quo D K ad H I eandem habet rationem, quam d ad e, hoc est, eandem quam inter se servant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre existentes diametro D K sunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, postquam superficiem ejus convexam D B K transierunt, colligantur simul in puncto I.



Denique si fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ D B, cujus axis sit D K: ad investigandum, quo pacto radius A B, qui in vitro existens ipsi D K est parallelus, se inflectere debeat, postquam superficiem ejus convexam D B erit egressus, supponendo ejusdem vitri refractionem esse eam, quæ est inter lineas d & e, facio H D vel K I $\propto a$, H I $\propto z$, & D F $\propto y$: eritque F H $\propto y - a$ vel $a - y$, & F I $\propto z + y - a$. Quibus positis, si Hyperbola D B descripta intelligatur beneficio fili, quemadmodum Capite 8vo Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4to Exercitationum nostrarum Mathematicarum, erit, factâ B I $\propto x$, B H $\propto x - z + 2a$. Vnde jam facile est invenire quantitatem y, supponendo quippe quantitates x & z esse cognitæ. Si enim à quadrato B H. $xx - 2zx + zz + 4ax - 4az + 4aa$ subducatur quadratum F H. $yy - 2ay + aa$, restabit $xx - 2zx + zz - yy + 2ay + 3aa + 4ax - 4az$, pro quadrato F B. Similiter, si à quadrato B I. xx auferatur quadratum F I. $zz + 2zy + yy - 2az - 2ay + aa$, relinquetur quoque $xx - zz - 2zy - yy + 2az + 2ay - aa$, pro quadrato F B. Hinc, cum habeatur æquatio

inter.

inter quadratum F B dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \infty \frac{zx - zz - 2aa + 3az - 2ax}{z}$. Esto jam D N $\infty\, v$ & N B $\infty\, s$, eritque N F $\infty\, v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Etenim si à quadrato N B. ss detraxero quadratum N F. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato F B. Vnde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium, habebitur $y \infty \frac{-ss + vv + xx - aa + 2az - zz}{-2a + 2z + 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \infty \frac{\begin{array}{ll} +2zzx & +ssz \\ -6az & -vvz \\ +4aa & -2vzz \\ +2vz & -4aav \\ -4av & +6avz \\ & -z^3 \\ & -9aaz \\ & +6azz \\ & +4a^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut innotescant quantitates v & s, positâ $x \infty f$, multiplico $x - f \infty 0$ per $x - f \infty 0$, & fit $xx - 2fx + ff \infty 0$, seu $xx \infty 2fx - ff$, æquatio similis præcedenti. Vnde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, invenitur v, hoc est, D N $\infty \frac{zx - zz + 3az - 2aa}{z - 2a}$. Cui si addatur D I. $z - a$, habebitur N I $\infty \frac{zx}{z - 2a}$. Denique cum linea N M ad N Q vel F B eam habeat rationem, quam inter se habent lineæ refractionem vitri D B mensurantes; & quidem N M ad N Q vel F B sit, ut N I ad I B: relinquitur, ut d sit ad e, sicut $\frac{zx}{z - 2a}$ ad x. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $dx \infty \frac{ezx}{z - 2a}$. Vnde, resolutâ æqualitate, invenitur H I seu $z \infty \frac{2ad}{d - e}$. E qua ablatis H D & K I seu $2a$, erit reliqua D K $\infty \frac{2ae}{d - e}$. Et manifestum est H I ad D K esse, ut $2ad$ ad $2ae$ vel ut d ad e. Id quod, dum de quolibet

 radio

radio A B ipſi D K parallelo perinde eſt intelligendum, nobis monſtrat, beneficio vitri Hyperbolici D B, in quo H I ad D K eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ eſt ejuſdem vitri menſura refractionis, radios, qui in vitro D B exiſtentes axi D K ſunt paralleli, egrediendo ſuperficiem ejus convexam D B ita flexum iri, ut egreſſi omnes coëant in punctum I.

PP *Cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululum concava exiſtit, ita ut ipſa pariter atque præcedens cordi haud ſit abſimilis.*] Vbi etiam ſciendum, ex poſitione punctorum H & F, quemadmodum Nobiliſſimus Hugenius notavit, contingere poſſe, ut versùs A convexa exiſtat.



A R-

ARGVMENTVM
TERTII LIBRI.

Postquam primo libro exposita sunt ea, quæ viam aperiunt ad Autoris Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriæ Problematis utitur, ibidemque simul ostensa est ratio construendi Problemata Plana, hoc est, quæ reduci possunt ad æquationes Quadratas, quæque rectarum linearum atque circuli circumferentiarum ope solvi possunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearium constructiones, hoc est, quæ ad æquationes Cubicas altiorumve graduum ascendunt, & ad quorum constructiones, sectionibus Conicis, aliisque curvis lineis magis compositis uti necessarium est. Vbi observandum est, quòd, cum peccatum sit non leve apud Geometras, Problema Planum construere per Conica aut Linearia, hoc est, ipsum per improprium solvere genus, ita quoque sit cavendum ne in constructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quæ magis sit composita, quam ipsius natura admittit.

Quocirca, postquam secundo libro ostensum est, quo pacto curvæ lineæ, mediantibus æquationibus, quæ exhibent relationem, quam ipsarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, distingui possint in certa genera, atque exinde cognosci, quænam illarum magis sint compositæ; superest ut explicemus, quomodo sciri possit, utrum Problema aliquod sit vel Planum, vel Solidum, vel denique Lineare. Arguitur autem Problema Planum esse, cum æquatio, ad quam perducitur, postquam ad simplicissimos terminos est reducta, atque amplius reduci nequit, Plana existit, hoc est, ut incognita quantitas ad quadratum adscendat, duasve habeat dimensiones, illaque per rectas lineas & circulorum circumferentias inveniri possit, quemadmodum primo libro fuit ostensum. At verò Solidum esse, quando æquatio, quæ ex eo deducitur, postquam ad simplicissimos terminos reducta est, talis existit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc est, ad 3 aut 4 dimensiones adscendat, ipsaque non nisi Conicam aliquam sectionem in constructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare denique, ubi æquatio illa, postquam non amplius reducibilis est, plus quàm Solida existit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimensiones assurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimensiones, atque ita porrò in infinitum; ipsaque non nisi per curvam secundi, aut tertii, aut superioris denique generis, inveniri potest.

Ex quibus perspicuum est, quòd, etiamsi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primâ, quæ fortè occurrat, ad constructionem cujusque Problematis uti liceat; sed eligendam esse semper simplicissimam, per quam possibile sit illud ipsum resolvere. Atque pro simplicissimis non habendas esse illas, quæ facillimè omnium describi possunt, sive quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim illas, quæ simplicissimi sunt generis, & ad quæsitam lineam determinandam inservire queunt. Ita ut, si peccatum sit in Geometria (quemadmodum supra diximus) Problema aliquod propositum construere per genus Linearum curvarum, magis compositum, quam natura ejus permittit; contra quoque pro vitio habendum sit, si quis inutiliter desudet ad illud ipsum, per genus aliquod linearum simplicius, quam natura ejus admittit, construendum.

Quapropter ut utrumque vitium evitari, ac unumquodque Problema ex proprio suo linearum genere solvi possit, postquam tam Problematis quam ipsius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere est ostensum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere posse diversas radices sive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipsa habet dimensiones; earumque interdum quasdam esse, quæ falsæ existunt vel nihilo sunt minores; interdum etiam, quæ planè imaginariæ; sicut etiam quâ ratione ipsæ æquationes producantur ex suis radicibus in se invicem ductis, ita ut per illas rursus sint divisibiles. Quas divisiones subinde utiles ostendit ad explorandum utrum certæ quædam quantitates sint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipsas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimensiones reducendam. Deinde, postquam ostendit quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque æquatione haberi possint, sicut etiam quo pacto falsæ reddantur veræ, & veræ falsæ, docet, quo pacto qualibet æquatio transmutari possit in aliam, ita ut radices ejus sint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quàm radices prioris; & quidem quoties id fit, ut quædam ex illis sint veræ, quædam verò falsæ, quòd tum augendo veras, falsæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, secundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ transmutationis tolli possit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones sub latere, in Cubicis sub quadrato, in Quadrato-quadratis sub cubo, &c. evanescant. Post hæc, quando quædam ex radicibus veræ sunt, quædam verò falsæ, (id quod ex signorum serie manifestum fit) declarat, facile esse ejusdem transmutationis beneficio efficere, ut radi-

radices omnes evadant veræ. Porrò, quemadmodum æquationes Cubicæ atque Quadrato-quadratæ omnes per eandem curvam lineam solvi possunt, utpote per aliquam trium Coni sectionum; & rursus Surdesolidæ atque Quadrato-cubicæ omnes per aliam curvam, quæ uno gradu magis est composita quam sectiones Conicæ, atque sic ulterius; sic ut binæ priores juxta eandem regulam construi queant, sicut etiam binæ posteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus æquationibus ob multitudinem terminorum & variationem signorum + & — plurima inde (ut diximus) nascantur formulæ, regulaque illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto æquationes illas attollere liceat, hoc est, Surdesolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque simul efficere, ut, si quæ terminorum loca in illis desint, ipsa repleta existant, ut tandem, si quædam ex radicibus falsæ, quædam autem veræ sint, ipsæ æquationes transmutari possint in alias, ubi radices omnes sint veræ, ipsaque secundùm eandem constructionis regulam inveniri possint. Præterea, quoniam æquationes frequenter fractionibus & surdis numeris involutæ occurrunt, aut ipsæ etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minùs expeditè resolvantur feliciterque explicentur, aut ut non nisi operosiorem in resolvendo industriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque surdos numeros, sicut etiam ad transmutandos vastos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi possint per quantitatem aliquam cognitam sive numerum. Id quod inservire insuper potest ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in æquatione æqualem cuidam alteri datæ. Cæterùm ne quid desit, quod ad intelligendas radices alicujus æquationis requiratur, ostendit ipsas interdum sive veras sive falsas solummodo imaginarias esse. Ita ut, licèt semper in qualibet æquatione tot talesque, quales supra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quæ aliquibus ex ipsis respondeat.

Postquam igitur ea, quæ ad æquationum recognitionem atque emendationem pertinent, exposita sunt, & quidem ex æquationum cognitione (ut supra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout æquatio est vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdesolida aut Quadrato-cubica, vel plurium denique dimensionum, Problema, quod ad ipsam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c; illudque exinde construi queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicas, vel per lineam curvam uno vel pluribus gradibus magis compositam: Hinc, priusquàm ad æquationum resolutionem accedit, ac Problema propositum ex proprio suo Li-

Linearum genere solvit, tradit, quo pacto post transmutationes requisitas, quando Problema est Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum adscendit, ipsa dividi atque reduci possit ad Quadratum, ita ut deinde regulæ ac circini beneficio, sicut primo libro monstratum fuit, resolvi queat; ac denique quid in genere observandum sit circa reliquas superiores æquationes. Ita ut post institutas illas divisiones, quando æquatio ad tres quatuorve dimensiones assurgit ipsaque amplius dividi nequit, asserere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum existere, nec inde minus vitium reputandum esse, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quam adhibere Conicas sectiones in constructionem eorum, quæ per regulam & circinum solvi possunt.

Quibus explicatis, accingit se deinceps ad Solidorum Problematum constructionem, postquam reducta sunt ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, & in æquatione secundus terminus est sublatus. Eâque ita præparatâ, docet, unicâ regulâ ope Parabolæ facilè ac expeditè posse construi. In quo sanè eximium atque summi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quòd sciam) ante vel excogitatum vel ostensum. Cæterùm ut hujus regulæ facilitas ac usus in Solidorum Problematum constructionibus eniteat, ipsam deinde, in solvendis nobilissimis binis illis, ac celebratis, nec non antiquitus usque adeò agitatis Problematis; altero scilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ breviùs expeditiusque, quàm ab aliquo hactenus ostensum est, solius Circuli & Parabolæ ope, scientificè atque Geometricâ ratione resolvit. Vbi tandem declarat (quod animadversione dignum) in Problematibus Solidis omnibus, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum reducta sunt, non secus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quàm quatenus ipsa adhibenda est ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad secandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non sinit, ut terminis simplicioribus, quam per certa quædam Cuborum latera, quorum contentum cognoscitur, aut per subtensas quorundam arcuum, quorum triplum datum est, exprimantur; neque etiam per constructionem aliquam, quæ simul generalior & simplicior sit, determinentur.

Finitâ verò Solidorum Problematum constructione, aggreditur demum Surdesolidorum constructionem, hoc est, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimensionum reducuntur, & ad quarum constructionem curva linea adhibenda est, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ.

Quam

Quam ut breviter ac unius regulæ beneficio resolvere doceat, observari vult ea, quæ supra monuimus, nimirum ut æquationes quinque dimensionum attollantur ad sex dimensiones, ipsæque demum, si opus est, transmutentur in alias, quarum radices omnes sint veræ. Qualem autem & quantum in hisce Problematis construendis Geometram se prodiderit Auctor, sanè si id ipsum ex superioribus perspicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac sola artificiosissima atque planè stupenda eorum constructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latêre ipsum non potest. E quibus tandem colligere licet, quòd, postquam omnia Geometriæ Problemata ad unum quasi Problema revocata fuerint, quod est, ut quæratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices, reductisque ad eandem constructionem, quæ ejusdem generis existunt, tradita simul sit via eadem resolvendi. Adeò ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò æquationem 5 aut 6 dimensionum non excedat, reperiri queat, quòd hujus Geometriæ Methodo solvi seu construi non possit.

COMMENTARII
IN
LIBRVM TERTIVM.



VERÙM *sæpè accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, puta 5.*] Hoc est, quòd x æquetur -5, vel $x+5$ sit æquale 0. Quod non ineptè explicatur per eum, qui plus debet quàm est solvendo; vel, cùm id, quod reliquatur, designamus per —. Quò referenda est jucunda atque ingeniosa quæstio, à laudatissimæ memoriæ, Mauritio, Principe Auriaco, atque Confœderati Belgii gubernatore, olim excogitata, quam Amplissimus & Prudentissimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius,

Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utilissimis, & publicâ luce dignissimis, quæ inter adversaria parentis possidet, pro sua liberalitate mihi communicavit.

A & B, societatem ineuntes, lucrati sunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc est, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex summa debeatur? Respondetur, solvendos esse à B ipsi A, 8 aureos, quamvis lucrum hîc esse sit manifestum.

Aliud exemplum de damno.

Personæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc est, habent — 12 aur. Cùm igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifestum fit, ipsi A ex natura quæstionis deberi — 20 aureos, & ipsi B + 8 aur., hoc est, B habebit 8 aureos; etiamsi jacturam factam esse constet.

Quamvis autem non sit usitatum, ut qui aliquid habet in bonis societatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen casus occurrere possunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amstelodami habitantes habent quisque institorem suum Venetiis, & quia institoribus istis non satis fidunt, sciuntque inter ipsos esse inimicitias, mandant illis per literas, ut sibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos suos pertinentis, quam penes se habebunt eo tempore, quo literas istas accipient; atque si unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia solvatur, & cum residuo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, nisi cum alterius consensu. Ipsi autem mercatores qui certò non sciunt, quid Venetiis eo tempore sint habituri, quo literæ istæ eò pervenient, talem inter se societatem ineunt, ut quisque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, sit accepturus. Quibus positis, si contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia persolutis, tria tantùm aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus si lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod est quadruplum pecuniæ: sequitur ex vi societatis illum qui habuit 5 millia debere 20 millia lucrari, & alium

& alium 8 millia amittere. Contra verò si damnum sit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempe suæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quòd à priori sumpserit 2 millia, quæ si emendis mercibus impensa fuissent, damnum 8 millium ei attulissent.

Porrò radices hæ falsæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc est, ut, quæ designantur per —, retrocedant, sicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum post videbitur.

Inservit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falsis cognitis, æquationes facilè divisionis ope ad pauciores dimensiones reducuntur, ex iisque veræ eruuntur. Cujus rei exemplum in sequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quòd, postquam tam falsæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæstionis cognitionem atque solutionem perducamur, & casus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi constabat. Cujus rei exemplum sequentia itidem suppeditabunt.

Unde liquidò constat, quòd Æquationis summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis.] Hoc enim ex Æquationis, quæ plures radices admittit, constitutione manifestum est: cum æquatio quævis producatur ex suis radicibus, in se invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Unde fit, ut rursus per illas dividi possit, cum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvatur. B

Sic si ponatur $x \infty a$, hoc est, $x - a \infty 0$, & rursus $x \infty b$, hoc est, $x - b \infty 0$, & denique $x \infty c$, hoc est, $x - c \infty 0$, atque multiplicemus $x - a \infty 0$ per $x - b \infty 0$, & rursus productum per $x - c \infty 0$: exurget Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -axx & +abx & -abc \infty 0. \\ & -b & +bc & \\ & -c & +ac & \end{array}$$

Quæ dividi potest per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, & per $x - c \infty 0$; sed non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rursus multiplicetur per $x + d \infty 0$, (supponendo x desi-

 gnare

gnare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote d, hoc est, x æquari $-d$) producetur Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - a x^3 & + abxx & - abcx & - abcd \propto 0. \\ - b & + bc & + abd & \\ - c & + ac & + bcd & \\ + d & - ad & + acd & \\ & - bd & & \\ & - cd & & \end{array}$$

Quæ dividi potest per $x - a \propto 0$, per $x - b \propto 0$, per $x - c \propto 0$, & per $x + d \propto 0$, & non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

C *Cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.*] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimensiones habentem, per $x + d \propto 0$, orietur Æquatio

$$\begin{array}{lll} x^3 - axx & + abx & - abc \propto 0. \\ - b & + bc & \\ - c & + ac & \end{array}$$

In quâ incognita quantitas tres duntaxat dimensiones habet. Quâ rursus divisâ per $x - c \propto 0$, prodibit $xx \begin{smallmatrix} -a \\ -b \end{smallmatrix} x + ab \propto 0$, æquatio duarum dimensionum. Quæ denuo per $x - b \propto 0$ divisa exhibet $x - a \propto 0$, æquationem simplicem.

Vnde perspicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione, plures radices habente, quantitas cognita secundi termini, æqualis sit summæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis summæ productorum ex singulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis summæ productorum ex singulis ternis, atque ita porrò; at verò quantitas cognita ultimi termini sive ipse ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ tres sint radices 2, 3, & 4, quæ designantur per a, b, & c: erit earum summa 9, quæ denotatur per $-a-b-c$, æqualis -9, quantitati cognitæ secundi termini $-9xx$. Summa autem productorum ex singulis binis 26, quæ denotatur per $+ab+bc+ac$, æqualis $+26$, quantitati cognitæ tertii termini $+26x$. Et productum ex ipsis tribus, 24, quod denotatur per $-abc$, æqualis -24, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino.

Eodem modo, si fuerit Æquatio talis: $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, cujus radices sunt 2, 3, 4, & -5, atque designantur per $+a$, $+b$, $+c$, & $-d$: disponatur ipsa, ut termini,

ni, in quibus incognita quantitas x pares dimensiones habet, unam constituant æquationis partem, & reliqui alteram, hoc modo: $x^4 - 19xx - 120 \infty 4x^3 - 106x$. Eodem videlicet quo hæc:

$$x^4 \begin{matrix} +ab \\ +bc \\ +ac \\ -ad \\ -bd \\ -cd \end{matrix} xx - abcd \infty \begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ -bcd \\ -acd \end{matrix} x.$$

Præstat enim illam hîc ita considerare, ut ea, quæ proponuntur, meliùs explicentur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta simul addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquationis, eorumque signis conveniunt. Et manifestum est, summam harum radicum efficere $+4$, & æqualem esse $+4$, quantitati cognitæ secundi termini $4x^3$. Deinde summam productorum ex singulis binis efficere -19, & æqualem esse -19, quantitati cognitæ tertii termini $19xx$. Postea summam productorum ex singulis ternis efficere -106, & æqualem esse -106, quantitati cognitæ quarti termini $106x$. Denique productum ex ipsis omnibus in se invicem ductis efficere -120, & æqualem esse -120, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino 120. Quæ porrò, quo pacto intelligenda sint de Æquationibus, in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de Cubicarum Æquationum resolutione, quam hisce Commentariis subjunximus, ubi ista fusiùs pertractantur.

D *Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & −; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa −, quæ se invicem sequuntur.*] Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex suis radicibus, in se invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70 est ostensum, quod & de cæteris regulis, ubi signorum + & − fit mentio, est observandum. Ut satis declarant priora verba: *Ex quibus etiam cognoscitur.* quæ horum verborum cum prioribus cohærentiam demonstrant: cum aliàs fieri posset, ut in qualibet Æquatione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet

dimensiones; neque tot veræ, quot in ea reperiuntur variationes signorum + & —; aut tot falsæ, quot vicibus deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quæ se invicem sequantur.

Vt in æquatione $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$, quæ non producitur ex multiplicatione trium radicum, ut fit pag. 69 & 70, sed tantùm ex multiplicatione æquationis impossibilis $xx - 4x + 5 \propto 0$ per $x - 2 \propto 0$. Vnde fit, quòd, licèt in æquatione proposita tres concipiantur veræ radices, tamen una tantùm ex illis sit realis, nimirum 2, & reliquæ duæ non nisi imaginariæ, quarum valor nullo modo comprehendi potest.

Quæ autem dicta sunt de æquationibus, quæ ex radicibus suis in se invicem ductis procreantur, non tantùm referenda sunt ad æquationes completas, hoc est, in quibus omnes termini extant, ut in exemplo ab Authore allato; sed etiam de incompletis, ubi unus vel plures termini desunt.

Vt si habeatur $z^3 \propto * - pz + q$, & scire velim, postquam multiplicatione productam supposuerim, quot admittat veras radices, & quot falsas; scribo $z^3 \pm 0zz + pz - q \propto 0$. Deinde supponendo $0zz$ esse primò signo + adfectum (perinde enim est, sive illum signo + sive signo — adfectum concipias): invenio, propter terminos $+z^3$ & $+0zz$, eodem signo affectos, statuendam esse unam falsam radicem: similiter, propter terminos $+0zz$ & $+pz$, eodem rursus signo adfectos, statuendam esse alteram falsam: ac denique, propter terminos $+px$ & $-q$, diversis signis notatos, ponendam esse unam veram radicem. Postea, supponendo secundum terminum signo — adfici: erit, propter terminos $+z^3$ & $-0zz$, diversis signis notatos, una vera radix: &, propter terminos $-0zz$ & $+pz$, qui diversa possident signa, altera vera: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, etiam diversis signis designatos, tertia radix vera. Adeò ut ex prima suppositione eliciam duas falsas & unam veram, at ex secunda tres veras. Quas sic designo: Verùm, quoniam, supponendo secundum terminum affe-

1. 2. ctum esse signo sive + sive —, certò scimus, nihil in
f v proposita æquatione mutari: ideo, ut hæc regula mul-
f v tiplicationem, quâ æquatio allata producta fuerit,
v——v nos edoceat: radices illas inter se confero. Vnde,

cum deprehendam duas tantùm esse, quæ consentiunt, easque veras; reliquas autem, quomodocunque collatio instituatur, ne-

qua-

nusquam consonare: concludo æquationem propositam explicabilem tantùm esse de unica radice vera, & reliquas duas non nisi imaginarias existere; neque ipsam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam esse, quàm superiorem $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$.

Eodem modo, si habeatur $z^3 \infty * - pz - q$, seu $z^3 \, 8 \, 0zz + pz + q \infty 0$: invenio è priori suppositione tres falsas radices; è posteriori verò duas veras & unam falsam. Quibus inter se col-
1. 2. latis, ut consensus earum appareat, invenio, æquatio-
f v nem propositam unam tantùm admittere radicem,
f v. nempe falsam; duasque reliquas esse imaginarias: ac
f——f proinde æquationem non posse procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, si fuerit $z^3 \infty * + pz + q$, seu $z^3 \, 8 \, 0zz - pz - q \infty 0$; quoniam è priori suppositione invenio duas falsas & unam veram
1. 2. radicem; & è posteriori duas itidem falsas & unam
f v veram: cognosco, æquationem propositam, multi-
v f plicatione trium radicum, quarum duæ sunt falsæ &
f——f una vera, produci posse.

Non secus, si habeatur $z^3 \infty * + pz - q$ seu $z^3 \, 8 \, 0zz - pz + q \infty 0$; video in priori suppositione reperiri duas veras radices,
1. 2. cum una falsa, atque in posteriori similiter duas ve-
f v ras, & unam falsam: adeo ut concedendum sit, ipsam
v f procreari posse ex multiplicatione trium radicum, qua-
v——v rum duæ sunt veræ, & tertia falsa. Idem de aliis sentiendum. Vbi notandum, radices veras & falsas alicujus æquationis semper esse reales, seu existentes, hoc est, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis designantes, quarum valor Arithmeticè vel Geometricè exprimi potest; imaginarias verò non item. Vt in æquatione $xx - 4x + 5 \infty 0$. Quamvis enim in ea duas nobis imaginari possimus radices; tamen nulla iis respondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri possunt. Quod sanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propositam esse impossibilem; neque ullam veram nec falsam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipsis respondeat, inveniri posse. Nisi velis, radices ejus esse $x \infty 2 + \sqrt{-1}$, & $x \infty 2 - \sqrt{-1}$, quarum certè

valor

valor nullo modo comprehendi potest. Non magis quàm si illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p.7, describendo ex centro N, intervallo lineæ N L ∞ 2, (utpote æqualis semissi ipsius 4, quantitatis cognitæ secundi termini) circulum L Q R, faciendoque rectam L M $\infty \sqrt{5}$ (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5); circulus descriptus L Q R neutiquam secare aut tangere potest rectam M R, quæ ipsi L M ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices designandas.

Idem de altioribus æquationibus est intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E descriptus Parabolam F A G secare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus C N Q curvam A C N neutiquam vel tangit vel secat.

E *Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in* 2°, 4°, 6°, *aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis* 1^{mi}, 3^{tii}, 5^{ti}, *similiumque locorum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.*] Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis desunt, qui cyphrâ sunt supplendi. Vt si fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$ seu x^3 ʒ $0xx + 8x + 24 \infty 0$, mutando signa + & — secundi & quarti loci in contraria, fit æquatio x^3 ʒ $0xx + 8x - 24 \infty 0$, seu $x^3 \infty * - 8x + 24$, cujus radix est $x \infty 2$, unde radix prioris fit $x \infty -2$.

Eodem modo si sit $x^3 \infty * 1201x + 14400$, seu x^3 ʒ $0xx - 1201x - 14400 \infty 0$, mutatis signis 2^{di} & 4^{ti} loci, fiet æquatio x^3 ʒ $0xx - 1201x + 14400 \infty 0$, seu $x^3 \infty * 1201x - 14400$, cujus radices sunt $x \infty 25$, & $x \infty \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, nec non $x \infty -\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Vnde radices prioris erunt $x \infty -25$, & $x \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, nec non $x \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Et sic de aliis.

F *Vnde si scribamus summam præcedentem, substituendo ubique y pro x, invenietur*

$$
\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
 & - 19yy & + 114y & - 171 \\
 & & - 106y & + 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
y^4 - 8y^3 & - 1yy & + 8y & * & \infty 0
\end{array}
$$

, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$. *Vbi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium*

narium ipsi additum.] Notandum hîc est, quòd, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propositæ $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$, in æquationem incidimus, tres tantùm dimensiones habentem, cujus ideo non nisi tres sunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propositæ est aucta, sit æqualis alicui ex falsis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Autore p. 72 paulò post explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, incidimus in æquationem $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y * \propto 0$, vel $y^3 + 8yy - 1y - 8 \propto 0$, innotescit, unam ex veris radicibus esse 3. Et sic de aliis.

Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.] Vel etiam hoc modo: *Nimirum, diminuendo quantitatem cognitam secundi termini divisam per numerum dimensionum primi, unaquâque verarum radicum, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.* Vt ad tollendum secundum terminum Æquationis $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$, divido $2a$ per 4, & provenit $\frac{1}{2}a$: unde faciendo $\frac{1}{2}a - x \propto z$, hoc est, $\frac{1}{2}a - z \propto x$, scribendum est

$+\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3z + \frac{3}{2}aazz - 2az^3 + z^4$ pro x^4

& $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3z - 3aazz + 2az^3$ pro $-2ax^3$

& $+\frac{1}{2}a^4 - 2a^3z + 2aazz$ pro $+2aaxx$

& $-\frac{1}{4}aacc + accz - cczz$ pro $-ccxx$

& $-a^4 + 2a^3z$ pro $-2a^3x$

tum $+a^4$, & exsurget

$$\begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 + a^3z + \frac{1}{2}aazz & * & +z^4 \propto 0, \\ -\frac{1}{4}aacc + acc - cc & & \end{matrix}$$ æquatio,

secundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantùm in quarto termino, qui hîc per + denotatur, & illic per —. Vnde fit, ut per ea, quæ pag. 70 sunt ostensa, æquationes hæ in eo tantùm inter se differant, quòd falsæ illius æquales sint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua sit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Vbi porrò operæ pretium eſt conſiderare, quòd, tollendo ſecundum terminum Æquationis $x^4 + 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2accx - aacc \infty 0$, (quæ quidem invenitur, cùm pro linea CE in quæſtione pagin. 83 ponitur x) in eandem incidamus Æquationem, quam invenimus tollendo ſecundum terminum præcedentis $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ ab illa omnino eſt diverſa, reſultans ex inveſtigatione lineæ DF.

Deinde animadverſione dignum eſt, quòd hâc ſublatione ſecundi termini Æquationes pagin. 6 & 7 in faciliores ſic transmutentur, ut earum radices ſtatim ſe prodant, nec aliâ regulâ ad eas inveniendas opùs eſſe videatur. Etenim, tollendo ſecundum terminum æquationis $zz \infty az + bb$ ſeu $zz - az - bb \infty 0$, ſi dividatur a per 2, fit $\frac{1}{2}a$, ac ponatur

$z - \frac{1}{2}a \infty x$, ſive $z \infty x + \frac{1}{2}a$,

atque pro zz reponatur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$,
nec non pro $-az$ $\quad -ax - \frac{1}{2}aa$,
& addatur $\quad - bb$:

reſultabit æquatio hæc $xx * - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix eſt $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Vnde ſequitur radicem prioris æquationis $zz \infty az + bb$ fore $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quæ radices, cum vera tum falſa etiam inveniuntur tollendo ſecundum terminum, hoc pacto: ponatur

$\frac{1}{2}a - z \infty x$, ſeu $z \infty \frac{1}{2}a - x$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax + xx \\ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax \\ \hline \end{array}$$

& ſcribatur $\frac{1}{4}aa - ax + xx$ pro zz,
atque $-\frac{1}{2}aa + ax$ $\quad$ pro $-az$,
tum $-bb$

Et emerget Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$. eadem quippe, quæ invenitur, ponendo $z \infty \frac{1}{2}a + x$ (quod ſimiliter in reliquis ſequentibus quadratis Æquationibus locum habet), & fit, ut ſupra, $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ac proinde $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem

Eodem modo, quia auferendo secundum terminum Æquationis $yy \propto -ay + bb$, seu $yy + ay - bb \propto 0$, ponitur $y + \frac{1}{2}a \propto z$, sive $y \propto z - \frac{1}{2}a$,

atque pro yy scribitur $zz - az + \frac{1}{4}aa$,

& pro $-ay$ $+az - \frac{1}{2}aa$,

atque deinde $-bb$:

prodibit æquatio $zz * -\frac{1}{4}aa - bb \propto 0$, vel $zz \propto \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: hinc radix prioris erit $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$, vel $y \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ quidem falsa & vera radix invenitur quoque tollendo secundum terminum Æquationis hâc ratione: videlicet, supponendo y designare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, Exempli causâ, $y \propto -\frac{1}{2}a - z$,

& substituendo $\frac{1}{4}aa + az + zz$ loco yy,

& $-\frac{1}{2}aa - az$ loco $+ay$,

tum $-bb$:

unde fit Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb * + zz \propto 0$, vel $zz \propto \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; atque adeò $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ut ante. Quem modum, tollendi secundum terminum, tanquam diversum ab eo, qui ab Authore pag. 73 est ostensus, notare potes, cùm primus & secundus terminus eodem signo + vel — sunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum secundum terminum Æquationis $zz \propto az - bb$, vel $zz - az + bb \propto 0$, ponendum sit

$z - \frac{1}{2}a \propto x$, vel $z \propto x + \frac{1}{2}a$,

& scribendum $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ pro zz,

& $-ax - \frac{1}{2}aa$ pro $-az$,

& addendum $+bb$:

proveniet Æquatio $xx * -\frac{1}{4}aa + bb \propto 0$, vel $xx \propto \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit radix prioris $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quæ radix utraque vera est, & alio item modo inveniri potest, si nimirum ponatur $\frac{1}{2}a - z \propto x$ sive $z \propto \frac{1}{2}a - x$, & substituatur

$\frac{1}{4}aa - ax + xx$ in locum zz,
& $-\frac{1}{2}aa + ax$ in locum $-az$,
& addatur $+ bb$:

exsurget æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + xx \propto 0$, vel $xx \propto \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit prioris radix $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut supra.

Denique, quoniam tollendo secundum terminum Æquationis $zz \propto -az - bb$, vel $zz + az + bb \propto 0$, ponendum est $z + \frac{1}{2}a \propto x$ sive $z \propto x - \frac{1}{2}a$, & subrogandum
$xx - ax + \frac{1}{4}aa$ in locum zz,
& $+ ax - \frac{1}{2}aa$ in locum $+az$,
atque addendum $+ bb$:

producetur æquatio $xx * - \frac{1}{4}aa + bb \propto 0$, vel $xx \propto \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Vnde radix prioris fit $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$, vel $z \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ utraque hoc casu est falsa, & hâc etiam viâ inveniri potest, nimirum supponendo z designare quoque defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, utpote ponendo $z \propto -\frac{1}{2}a - y$, & substituendo
$+\frac{1}{4}aa + ay \quad + yy$ loco zz,
& $-\frac{1}{2}aa - ay$ loco $+az$,
tum addendo $+ bb$,

unde provenit æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + yy \propto 0$, vel $yy \propto \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $y \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$; atque adeò $z \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut ante.

Eâdem ratione tolletur secundus terminus reliquarum Æquationum quadratarum pag. 6 & 7, quæ similiter hâc operatione eò reducentur, ut ad ipsarum radices inveniendas hæc regula sufficere videatur.

Intellige Æquationes, in quibus z^3 æquatur duo-

Verùm enimverò animadvertendum est, quòd, sicut Æquatio quælibet Quadrata composita sublatione secundi termini ad aliam reducitur, in qua duo tantùm sunt termini, sic nulla Cubica esse possit, pluribus terminis constans, (ex quibus 13 casus confici pos-

ci possunt) quæ hâc ratione non reducatur semper ad aliquam trium sequentium formularum:

bus aut tribus terminis, per +, aut per + & —, simul junctis.

$$z^3 \infty * - pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz - q.$$

Idem de Quadrato-quadratis Æquationibus, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, quarumque 42 diversi modi extare possunt, est intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 expositam ad Cubicas reduci queant, quarum radices duas habent dimensiones & termini omnes sunt completi, sic nulla itidem earum esse potest, quæ hâc sublatione non reducatur ad aliquam trium prædictarum formularum.

Sic postquam Æquatio Quadrato-quadrata $1\,zz + 8\,z^3 - 26\,z - 68\,z - 84 \infty 0$ per dictam regulam reducta est ad Cubicam $x^6 - 100\,x^4 + 2900\,xx - 10000 \infty 0$, in qua omnes termini sunt completi, tollitur secundus terminus, hoc modo: Divisis 100 per 3, fit $33\frac{1}{3}$. Unde ponendo $xx - 33\frac{1}{3} \infty yy$, sive $xx \infty yy + 33\frac{1}{3}$, scribendum est

$$y^6 + 100\,y^4 + 3333\tfrac{1}{3}\,yy + 37037\tfrac{1}{27} \text{ pro } x^6,$$
$$\& \quad -100\,y^4 - 6666\tfrac{2}{3}\,yy - 111111\tfrac{1}{9} \text{ pro } -100\,x^4,$$
$$\& \quad + 2900\,yy + 96666\tfrac{2}{3} \text{ pro } 2900\,xx,$$
$$\text{tum} \quad -10000:$$

fietque æquatio $y^6 * - 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27} \infty 0$, vel $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27}$, tertiæ formulæ. Vbi notandum, dimensionum numerum primi termini x^6 tantùm pro 3 haberi, cum non sit x^5, x^3, & x in tota summa. Id quod similiter in sublatione secundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices duas dimensiones habent, est notandum. Quòd si verò ponatur $33\frac{1}{3} - xx \infty yy$, hoc est, $xx \infty 33\frac{1}{3} - yy$, prodibit Æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, secundæ formulæ, à præcedenti tantùm differens termino quarto, qui ibi signo + adficitur, hîc verò signo —. Vnde fit, quòd hujus æquationis falsæ radices æquales sint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut radices omnes veræ evadant, sciendum est, nos uti posse exemplo ab Authore proposito pag. 74: nimirum, $x^6 + n\,x^5 - 6\,nn\,x^4 + 36\,n^3x^3 - 216\,n^4xx + 1296\,n^5x - 7776\,n^6 \infty 0$, tanquam regulâ seu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ H

 sunt,

ſunt, inveniendam, ſicut annotavit Vir Nobiliſſimus D. Gothofridus ab Haeſtrecht, Mathematum cultor eximius, hujusque ſcientiæ peritiſſimus. Si enim, exempli causâ, propoſita ſit Æquatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \infty 0$, oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus ſigna + & — diverſa ſunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe $b, c,$ & f, conſiderare tantùm omnes reliquos, ut $a, d,$ & e. Vtpote $+ax^5$, quia in canone habetur $+nx^5$; & $-dxx$, quia in canone $-216n^4xx$; nec non $+ex$, quia in canone $+1296n^5x$. Qui quidem ſeorſim conſiderandi ſunt, & quærenda quantitas n, quæ non ſit minor quàm a, quia in canone habetur n, ubi in data Æquatione eſt a: & cujus quadrato-quadratum non ſit minus quàm $\frac{1}{216}d$, quia in canone habetur $216n^4$, ubi in data Æquatione eſt d: nec non cujus ſurſolidum non ſit minus quàm $\frac{1}{1296}e$, quia in canone habetur $1296n^5$, ubi in data Æquatione eſt e. Quantitate n ſic inventâ, manifeſtè ex ipſa operatione demonſtratur, ſi ponatur $y - 6n \infty x$, inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falſa eſſe poteſt, ut in exemplo Authoris. Quod Authori tam facilè viſum fuit, ut id explicare neglexerit.

I Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur ſequens exemplum. Proponatur æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, cujus loco alia invenienda ſit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Suppoſito igitur $zz \infty \frac{3}{10}yy$, ſcribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per nu- $y^6 \; ☋ \; 0y^4 - 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27} \infty 0.$
meros proportionales $1. \quad \frac{3}{10}. \quad \frac{9}{100}. \quad \frac{27}{1000}.$
fietque Æquatio $z^6 \; ☋ \; 0z^4 - 39\,zz - 340 \infty 0$, vel $z^6 \infty * + 39zz + 340$, cujus radix zz ad præcedentis radicem yy eſt, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inſervire etiam poteſt inveniendis radicibus proximè veris, cùm ipſæ ſunt irrationales. Vt, ad inveniendam veram radicem æquationis $y^3 \infty 200y + 400$ (quæ irrationalis eſt) quàm proximè, ita ut differentia milleſimâ parte unitatis minor ſit: ſuppoſito $z \infty 1000y$,

ſcribo $y^3 \; ☋ \; 0yy - 200 \quad y - 400 \quad \infty 0,$
& multiplico per $1. \quad 1000. \quad 1000000. \quad 1000000000.$
& exſurget æquatio $z^3 \; ☋ \; 0zz - 200000000z - 400000000000 \infty 0$, vel $z^3 * - 200000000z \infty 400000000000$, cujus radix z præcedentis radicis y eſt millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex

ex hac æquatione, methodo à Vieta tradita in tractatu de Numerosa Potestatum resolutione, invenietur z major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus divisis per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicavimus per 1000), fiet y major quàm $15\frac{52}{1000}$, & minor quàm $15\frac{53}{1000}$. adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram millesimâ parte unitatis minor sit. Quod erat inveniendum. Porrò quoniam æquatio proposita $y^3 \propto 200y +$ 400 duas adhuc admittit falsas radices, quæ similiter sunt irrationales, quia ipsa per $y +$ vel $-$ nullo numero ultimum terminum dividente dividi potest, possunt eâdem ratione inveniri, mutato tantùm signo $+$ in $-$. Quarum equidem major excedet $13\frac{10}{1000}$, & minor deficiet à $2\frac{42}{1000}$, componentes simul veram inventam $15\frac{52}{1000}$. Cæterùm, sicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipsas beneficio divisionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum resolutio non nisi operosiorem industriam requirat, in faciliores transmutare. Vt si fuerit æquatio $x^3 \propto * + 203125x + 23437500$, & ejus loco alia desideretur, quæ minoribus numeris exprimatur, dividenda est ipsa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125,

hoc pacto: $x^3 \pm 0xx - 203125x - 23437500 \propto 0$,
1. 125. 15625. 1953125.

& prodibit æquatio $y^3 \pm 0yy - 13y - 12 \propto 0$, vel $y^3 \propto * 13y + 12$, cujus radices sunt $+4$, -3, & -1, quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 divisimus.) exsurgent radices prioris $+500$; -375, & -125.

Vbi porrò notandum, quòd, postquam æquatio quælibet à fractionibus aut surdis numeris est liberata, atque in faciliorem transmutata, fieri non possit, ut ulla ex hujus radicibus, sive falsis, sive veris, sit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facilè ex 7[mo] Elementorum libro demonstrari potest. Adeò ut, si illa deinde sicut pag. 77 est ostensum dividi nequeat, concedendum sit, nullam ex radicibus sive falsis sive veris numero explicari posse, sed omnes esse irrationales.

Quibus ita constitutis, ut pateat quo pacto hæ radices surdis numeris sint exprimendæ, visum fuit ea, quæ ab ingeniosissimo Huddenio nostro circa hæc excogitata sunt, in medium adducere.

Hinc ut investigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis

tionis $zz - az - bb \infty 0$, quæ per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividi nequit, per ſurdas quantitates exprimi poſſint: ſuppono primùm z eſſe æqualis ſimplici alicui quantitati ſurdæ, utputa, $\sqrt{x}$, & fit $z - \sqrt{x} \infty 0$. Quam, ut ad æquationem quadratam ejuſdem formæ perducam, in qua ſecundus terminus eſt rationalis, multiplicare debeo per $z + y + \sqrt{x} \infty 0$. Sed quoniam ſic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis eſt, concludo radices æquationis propoſitæ hoc modo non poſſe denotari ſive exprimi. Idem fit ſupponendo $z \infty - \sqrt{x}$.

Quocirca ſtatuendo nunc $z \infty y + \sqrt{x}$ ſeu $z - y - \sqrt{x} \infty 0$, oportet ipſam, ut ad æquationem quadratam aſcendat, in qua rurſus ſecundus terminus ſit rationalis, multiplicare per $z - y + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $zz - 2yz + \begin{array}{l} yy \\ -x \end{array} \infty 0$, æquatio ejuſdem formæ cum allata, & in qua item tertius terminus rationalis eſt. Hinc comparando ſecundum terminum unius cum ſecundo alterius invenio $- 2y \infty - a$, hoc eſt, $y \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $yy - x \infty - bb$. In qua ſi in locum yy ſubrogetur $\frac{1}{4}aa$, habebo $\frac{1}{4}aa + bb \infty x$. Ac proinde cum pro quæſitis radicibus ſuppoſuerimus $z \infty y + \sqrt{x}$, & $z \infty y - \sqrt{x}$, erunt ipſæ: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem modo ſi inveſtigare velimus, quo pacto radices æquationis indiviſibilis $yy + ay - bb \infty 0$ per quantitates ſurdas exprimi queant, ſtatuatur (neglectâ ſuppoſitione ipſius $y \infty \pm \sqrt{x}$) $y \infty - z + \sqrt{x}$ ſeu $y + z - \sqrt{x} \infty 0$, eaque, ut ad æquationem quadratam aſſurgat, in qua rurſus ſecundus terminus ſit rationalis, multiplicetur per $y + z + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $yy + 2zy + \begin{array}{l} zz \\ -x \end{array} \infty 0$. æquatio ejuſdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus eſt rationalis. Vnde comparando ſecundum terminum hujus cum ſecundo illius invenitur $z \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $x \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Atque adeò, cum pro quæſitis radicibus ſuppoſuerimus $y \infty - z + \sqrt{x}$, & $y \infty - z - \sqrt{x}$, erunt ipſæ: $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $y \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Similter, inveſtigando num radices æquationis $zz - az + bb \infty 0$, quam per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividere non licet, per ſurdas quan-

quantitates exprimi queant, invenitur eæ exprimi posse per $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & per $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perspicuum fit, hac ratione inveniri quoque simplicissimos surdos numeros, quibus radices hasce exprimere licet, atque ideo hinc etiam constare, quæ circa hæc à D^no des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quòd natura harum radicum non permittat, ut simplicioribus terminis exprimantur.

Vbi tandem etiam est advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componuntur pauciores numero existunt, tantò etiam quæsitum faciliùs obtineri possit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere secundum terminum tollere, ita ut deinde, si res bene inspiciatur, perpauci casus superfuturi sint.

Supponendum est $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, deinde verò scribendum K
$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.] Etenim positâ $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ sive $y \infty \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; erit $x \infty \frac{by}{a\sqrt{3}}$, & $xx \infty \frac{bbyy}{3aa}$, & $x^3 \infty \frac{b^1y^3}{3a^3\sqrt{3}}$. Quæ si in æquatione substituantur, habebitur $\frac{b^3}{3a^3}\frac{y^3}{\sqrt{3}} * - \frac{b^3y}{a\sqrt{3}} + c^3 \infty 0$; hoc est, communi multiplicatore $3a^3\sqrt{3}$, fiet $b^1y^3 * - 3aab^1y + 3a^3c^3\sqrt{3} \infty 0$: ac proinde communi divisore b^1, erit $y^3 * - 3aay - \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; aut Æquatio, per ipsam divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat. L
] Sic æquatio superior pag. 76: $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$ divisa per binomium $x - 2 \infty 0$ dat æquationem impossibilem $xx - 4x + 5 \infty 0$, & fit radix quæsita 2. Sic æquatio $x^3 \infty 1201x + 14400$ seu $x^3 \; 8 \; 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$ divisa per $x + 25 \infty 0$ dat æquationem $xx - 25x - 576 \infty 0$ seu $xx \infty 25x + 576$, quæ juxta præcepta pag. 6 & 7 resoluta ostendit radicem quæsitam esse $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. *Vide hic post in Appendice de Cubicarum æquationum resolutione.*

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, cùm Problema est Simplex.

Reductio Æquationum Quadratarum, cùm Problema est Simplex.

Vt si, verbi gratiâ, habeatur æquatio $xx \propto ax \begin{array}{l}+ab\\+bb\end{array}$ seu $xx - ax \begin{array}{l}-ab\\-bb\end{array} \propto 0$, poterit ea, inventis ipsius $ab + bb$ ultimi termini divisoribus 1, b, $a + b$, & $ab + bb$, dividi per binomium $x + b \propto 0$, oriturque $x - a - b \propto 0$. Id quod ostendit, radicem quæsitam esse $\propto a + b$, & Problema, quod ad hanc æquationem reducitur, esse Simplex, hoc est, construi posse ducendo tantùm rectas lineas.

Eodem modo, si fuerit $xx \propto \frac{-aax + aa}{a+1}$ seu $xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \propto 0$, quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatâ primùm

$$xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \propto 0$$

per quantitates proportionales $1.\quad a+1.\quad aa + 2a + 1,$

fit æquatio $yy + aay - a^3 - aa \propto 0$,

atque hâc, ut ante, divisâ per binomium $y + aa + a \propto 0$, oritur $y - a \propto 0$: liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter simplex existere, & y esse $\propto a$, adeoque $x \propto \frac{a}{a+1}$.

Haud secus Problema simplex erit, si obtineatur æquatio $xx \propto \frac{aax - aac}{a-c}$ seu $xx - \frac{aax}{a-c} + \frac{aac}{a-c} \propto 0$. Multiplicata enim eâ per proportionales 1, $a - c$, & $aa - 2ac + cc$, fit $yy - aay + a^3c - aacc \propto 0$. Quæ dividi potest per binomium $y - ac \propto 0$, oriturque $y - aa + ac \propto 0$. Vnde y invenitur $\propto ac$, aut etiam $y \propto aa - ac$: ac proinde $x \propto \frac{ac}{a-c}$, aut etiam $x \propto a$. Quorum duorum valorum ipsius x non nisi unus tantùm quæsito Problematis respondet, licèt uterque æquationi propositæ satisfaciat. Quod ipsum ex Problemate non adeò difficile semper est dignoscere.

Cæterùm Problema aliquod non præter simplex existere, vel hinc quoque inferre licet, cùm, operando juxta regulas pag. 6 & 7, quantitas, quæ per $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ aut per $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ exprimitur, omnino per extractionem radicis inveniri potest; ita ut ipsa sit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit. Vbi porrò observare licèt, quòd, in primo & secundo casu earundem æquationum, postquam ultimus terminus per bb fuerit designatus, aut is inventione mediæ proportionalis (sicut pag. 2 docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipsarum

rum

rum constructionem faciendum relinquatur, quod non per solarum rectarum linearum ductum absolvatur. Vide Exercitationum nostrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum constructione ex professo agitur.

Vbi demum observatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per solas rectas lineas construi posse, in quibus a & bb non nisi numeros designant sive integros sive fractos; aut etiam eas, in quibus hæ quantitates non per diversas literas denotatæ reperiuntur, etiamsi ipsis integri aut fracti numeri præfigantur.

Vbi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota summa.] Potest enim pro æquatione M

$$y^6 \begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix} \infty\ 0$$

substitui æquatio hæc:

$$z^3 \begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix} z \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix} \infty\ 0.$$

nimirum, supponendo $z \infty yy$, atque subrogando zz in locum y^4, & z^3 in locum y^6; ita ut, postquam innotuerit valor radicis z, opùs tantùm sit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radicis y.

Nec aliter operandum, si habeatur $x^4 \infty -axx+bb$. Possumus enim ipsius x^4 dimensiones solummodo pro duabus dimensionibus habere, & scribere $yy \infty -ay+bb$, supponendo $y \infty xx$, & $yy \infty x^4$, eritque radix ejus $y \infty -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$: adeoque radix $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. *Vide pag. 6.*

Quin & si fuerit $z^6 \infty * 39zz+340$, supponendo $x \infty zz$ potest pro ea reponi $x^3 \infty * 39x+340$, atque adeò ipsius z^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus haberi.

Eodem modo, si fuerit $x^8 \infty * +10x^4+16xx-9$, atque z supponatur ∞xx: poterit ejus loco scribi $z^4 \infty * +10zz+16z-9$, ita ut ipsius x^8 dimensiones tantùm pro 4^{or} dimensionibus habeantur. Et sic de aliis.

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema, quod ab ea dependet, esse solidum.] N

Sic

Sic quoniam æquatio $x^3 \infty 300x + 1200$, seu x^3 ꝏ $0xx - 300x - 1200 \infty 0$, dividi nequit per x plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 absque fractione dividente, quin aliquid post divisionem supersit, certum est, Problema, quod ad illam reducitur, esse Solidum. Quo autem pacto inveniantur numeri omnes, datum numerum absque fractione dividentes, manifestum fiet, ubi ex Stifelio exposuero rationem, inveniendi omnes cujusque numeri partes aliquotas, quod unum idemque est.

Etenim, si numerus par fuerit, dividendus est per 2, & divisor reservandus; tum rursus, si quotiens est par, dividatur similiter per 2, & divisor reservetur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quòd si verò numerus est impar, vel divisione jam factâ ad numerum imparem sit perventum, dividi debet per 3, si fieri potest, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 ampliùs dividi non possit. Tum eadem divisio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliumve numerum primum, sive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentasse, donec ad dati numeri radicem quadratam, sive veram, sive veræ proximam, perventum fuerit: cum ulteriores divisiones supervacaneæ sint habendæ. Iam verò quomodo ex reservatis numeris partes aliquotæ, seu divisores omnes dati cujusque numeri, inveniantur, sequentia exempla manifestabunt. Etenim ad inveniendos divisores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reservo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reservo. Postea divisis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reservo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reservo. Vnde numeri reservati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus divisores omnes seu partes aliquotæ sic inveniuntur.

1

2 . 3

6

7. 14. 21. 42.

11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. 462.

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fient 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fientque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt divisores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. & 462.

& 462. Vbi notandum, ex ductu ultimi numeri reservati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeò ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opùs non sit hosce duos numeros in se invicem ducere, si tantùm de illis quæstio fuerit, & non de divisoribus. Eodem modo, numerus 2310 divisores habebit sequentes.

1	21	3			
2310	1155	385	77	11	1
2	3	5	7	11	

1

2 . 3

6

5. 10. 15. 30.

7. 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210

11. 22. 33. 66. 55. 110. 165. 330. 77. 154. 231. 462. 385. 770. 1155. 2310.

Similiter divisores numeri 1200 erunt

		1	1	1			
1200	600	300	150	75	25	5	1
2	2	2	2	3	5	5	

1

2 . 2

4

2 . 8

2 . 16

3. 6. 12. 24. 48.

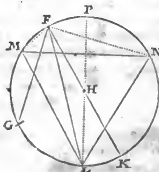
5. 10. 20. 40. 80. 15. 30. 60. 120. 240.

5. 25. 50. 100. 200. 400. 75. 150. 300. 600. 1200.

Verùm enimverò cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Æquationis propositæ summa dividenda est, ad investigandum, utrum Problema, quod ad æquationem illam est perductum, sit Solidum, an verò Planum, & si Planum sit, ipsa ad ejusdem æquationis radices inveniendas valde videatur prolixa; præsertim cùm ultimus terminus plures admittit divisores: sciendum est, quosdam ex iis seligi posse, è quibus si componatur binomium, per quod æquationis divisio non succedat, certi esse possimus Problema ab ea dependens Solidum existere.

 Sic

Sic cum in superiori æquatione $x^3 \infty * 300x + 1200$, vel x^3 8 $0xx - 300x - 1200 \infty 0$, triginta sint numeri, ultimum terminum 1200 absque fractione dividentes, atque hinc divisio vel sexagies esset tentanda, antequam certò constaret, Problema esse Solidum; sciendum est non opùs esse nisi tres vel quatuor ex iis considerare, ut 4, 15, & 20, atque reliquos insuper habere. Quemadmodum ex sequentibus fiet manifestum.



Etenim si numerus 300 vocetur p, & numerus 1200 vocetur q, & juxta id, quod docetur pag. 93, circulus describatur F G N, cujus radius F H sit 10, utpote $\infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in eo recta inscribatur F G ∞ 12, quippe $\infty \frac{3q}{p}$, ac deinde singuli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes dividantur per rectas F M, F N, & F L: designabunt duæ rectæ F M & F N quantitatem utriusque falsæ radicis, & F L quantitatem veræ. Adeò ut, ad eligendos divisores, qui ad æquationem dividendam utiles censeri possunt, opùs tantùm sit considerare eos, qui inventis lineis F M, F N, & F L quàm proximè accedunt, nullâ reliquorum habitâ ratione: adeoque divisionem tentandam tantùm esse per $x + 4 \infty 0$, vel per $x + 15 \infty 0$, vel per $x - 20 \infty 0$. Ac proinde cum tentatâ divisione aliquid supersit: sequitur, Problema, quod ad æquationem propositam perducitur, esse Solidum, nec ullam radicem sive veram sive falsam, quæ numero exprimi queat, admittere; sed omnes esse irrationales, earumque valorem esse exprimendam per quantitatem linearum dictarum F M, F N, & F L.

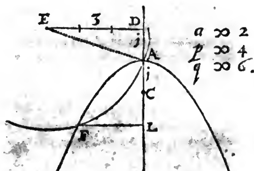
Eodem modo si habeatur $x^3 \infty * + 300x - 1200$, vel x^3 8 $0xx - 300x + 1200 \infty 0$: descripto rursus circulo F G N, cujus radius F H sit 10 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo inscriptâ rectâ F G ∞ 12 seu $\frac{3q}{p}$, si secentur singuli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes, designabunt F M, F N utramque veram radicem, & F L falsam. Adeò ut, cum divisio æquationis x^3 8 $0xx - 300x + 1200$

$+ 1200 \infty 0$ tentata per $x - 4 \infty 0$, per $x - 15 \infty 0$, & per $x + 20 \infty 0$ non succedat, concedendum sit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falsam, quæ numero exprimi queat; sed omnes esse irrationales: adeoque earum valorem non aliter quàm per quantitatem linearum F M, F N, & F L esse exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum esse.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generaliùs efficere.

Vt si habeatur Æquatio primæ formulæ $x^3 \infty * - 8x + 24$, cujus investigandæ sint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit divisores, qui sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè divisio tentanda esset antequam radicem propositæ Æquationis sic invenire possemus. Verùm sufficit semel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hisce divisoribus seligi possint, per quos si divisio non succedat, certi reddamur radicem esse irrationalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus esse formæ $x^3 \infty * - 2, 4x + 4, 6$, eadem nempe quæ $x^3 \infty * - apx + aaq$; in qua a pro unitate assumpta valet 2, p 4, & q 6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 resolutâ, invenitur radicem quæsitam



tam designari per lineam F L. Postea exploretur quisnam ex inventis divisoribus huic lineæ proximè accedat, ut seligantur per quos divisio sit tentanda, neglectis reliquis. Postquam autem compertum fuerit nullum ex ipsis propiùs huic lineæ congruere

quàm

quàm divisorem 2, & quidem Æquationem propositam $x^3 \infty\ 0\ xx + 8x - 24 \infty\ 0$ dividi posse per $x - 2 \infty\ 0$, & prodire Æquationem impossibilem $xx + 2x + 12 \infty\ 0$, quæ per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, ulteriùs dividi nequit: sequitur radicem quæsitam fore 2, neque ullam aliam extare, cum reliquæ duæ in hac formula semper sint imaginariæ.

Nec aliter fit, si fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$, quæ est Æquatio unam habens radicem falsam, nempe 2, & duas imaginarias: cum producatur ex multiplicatione Æquationis impossibilis $xx - 2x + 12 \infty\ 0$ per $x + 2 \infty\ 0$. Vbi observandum, quòd, licèt D. des Cartes ejusmodi Æquationis formulam inter Cubicas non reposuerit, sed tantùm eas, in quibus bini posteriores termini per $+$ aut per $+$ & $-$ juncti sunt, ipsa tamen nihilominus eodem modo, quo præcedens, resolvi, atque radix ejus exprimi possit. quod & de æquatione quadrata $zz \infty - az - bb \infty\ 0$ supra monuimus. Hinc si fuerit $x^3 \infty - 3x - 10$, seu $x^3\ 0\ xx + 3x + 10 \infty\ 0$, quæ per $x +$ aliquo numero ultimum terminum dividente dividi nequit: sequitur radicem ejus esse irrationalem, eamque juxta primam Cardani regulam, pagin. 93 descriptam, sic exprimi $x \infty - \sqrt{C.\sqrt{26} + 5} + \sqrt{C.\sqrt{26} - 5}$. nempe mutatis tantùm signis $+$ & $-$ utriusque partis. Idem intellige de Æquationibus $x^3 \infty - 8$, aut $x^3 \infty - 10$, quarum radices sunt $x \infty - 2$, & $x \infty - \sqrt{C.\ 10}$.

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi casus secundæ formulæ, puta $x^3 \infty + 8x + 24$, ubi $\frac{1}{4}qq$ est majus quàm $\frac{1}{27}p^3$. Quoniam enim dividi nequit per $x - 4 \infty\ 0$, qui divisor ad quantitatem radicis proximè accedit, non opùs est ut ulteriùs progrediamur, siquidem binæ reliquæ radices hujus casus semper sunt imaginariæ. Quare radix quæsita erit irrationalis, quæ juxta secundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, sic exprimetur: $x \infty \sqrt{C.\ 12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\ 12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Adeò ut dicatur composita ex duabus lineis, quarum una est prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}$, & altera prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}$. E quibus perspicua fiunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me potuisse quidem accipere a pro 1, ita ut p futura fuisset 8, & q 24: quo-

quoniam hîc liberum est assumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verùm quia praxis aliquo modo accommodatior visa est, si pro a ponatur 2, non 1, malui illam hypothesin huic posthabere.

Vbi porrò advertendum, radicibus Æquationum ita implicatis existentibus, simplicius censendum esse, earundem habitudinem ex sola Æquationum constitutione innuere, quàm ipsas prædicto modo exprimere. Vt in hac ultima $x^3 \propto + 8x + 24$, dicendo x talem esse, ut in se Cubicè ducta tantundem faciat ac si per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod fit addatur 24. Quippe sic ejus habitudinem longè simpliciùs concipere valemus, quàm si eandem hoc modo exprimeremus: $x \propto \sqrt{C.\, 12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\, 12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Id quod similiter de Æquatione $x^3 \propto - 3x + 10$ potest intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam sic exprimitur $x \propto \sqrt{C.\, \sqrt{26} + 5} - \sqrt{C.\, \sqrt{26} - 5}$: cum illius habitudinem, quam ex Æquationis constitutione induit, multò faciliùs concipiamus, prout eandem in se Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipsius triplo. Et sic de aliis.

Porrò si habeatur $x^4 \propto * + 10xx + 40x + 16$; suppositâ $a \propto 2$, erit $aa \propto 4$, & $a^3 \propto 8$, fietque æquatio $x^4 \propto * + 2, 5xx + 4, 10x + 8, 2$, ejusdem formæ cum $x^4 \propto * apxx + aaqx + a^3 r$, in qua p idem valet quod 5, q idem quod 10, & r idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividentibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem resolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 ostensam, eritque vera radix FL, & falsa GK. Denique, examinando ordine divisores inventos, explorando quinam ex ipsis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimùm discedant; invenio divisionem solummodo tentandam esse per $x - 4 \propto 0$, aut per $x + 1 \propto 0$. Ac proinde cum neutra harum divisionum succedat, concludo, Æquationem propositam, unam admittere veram radicem, & unam falsam, quarum utraque est irrationalis; ac reliquas duas esse imaginarias. *Vide figuram pagina versâ.*

Haud secus si fuerit æquatio $x^4 \propto * - 60xx + 7400x + 36000$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72,

75, 80, 90, 96, 100, 120, 125, 144, 150, 160, 180, 200, 225, 240, 250, 288, 300, 360, 375, 400, 450, 480, 500, 600, 720, 750, 800, 900, 1000, 1125, 1200, 1440, 1500, 1800, 2000, 2250, 2400, 3000, 3600, 4000, 4500, 6000, 7200, 9000, 12000, 18000, & 36000, fingo a esse 10, ac proinde æquationem propositam esse hanc $x^4 \infty * - \not{1}\not{0},6\,xx + \not{1}\not{0}\not{0},74\,x + \not{1}\not{0}\not{0}\not{0},36$, hoc est, ipsam esse hujus formæ $x^4 \infty * - \acute{a}p\,xx + \acute{a}\acute{a}q\,x + a^3r$; ita ut, secto latere recto a in 10 æquales partes, p earundem faciat 6, q 74, & r 36. Quâ deinde juxta regulam pag. 85, 86, 87 & 88 constructâ, invenio ipsam sicut antecedentem non nisi unam veram radicem admittere, utputa FL, & unam falsam, utpote KG, quarum longitudo ad partes lateris recti seu scalæ relata ostendit divisionem æquationis propositæ solummodo tentandam esse per $x - 20 \infty 0$ aut per $x + 5 \infty 0$. Hinc cum ipsa dividi possit per $x - 20 \infty 0$ & oriatur æquatio $x^3 + 20\,xx + 460\,x + 1800 \infty 0$, non autem per $x + 5 \infty 0$ quin aliquid post divisionem relinquatur: concludo veram ejus radicem esse 20, & falsam esse irrationalem, cujus valor seu quantitas, dum per longitudinem

nem solius inventæ rectæ K G accuratè exhibetur, propter hujus cum reliquis asymmetriam, numero tantùm quadantenus ex ipsius ad hasce relatione innotescit. Eodem modo investigari queunt radices æquationum, plures paucioresve dimensiones habentium.

Cæterùm cum radicum inventio res magni sit momenti, atque eorum, circa quæ Algebra versatur, præcipua: alium modum seligendi divisores, qui ad æquationem dividendam utiles judicari possunt, subjungam, quem communicavit Iacobus à Waessenaer, Vltrajectinus, Geometra peritissimus, atque in hac Cartesiana Methodo versatissimus.

Inveniantur radices æquationis $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Vnde æquatio proposita dividenda est per $x \pm 1$, vel per $x \pm 2$, &c. Verùm cum complures hîc sint divisores, & tantùm tres hîc esse possint, per quos divisio fieri queat: constat, divisionem pluries esse tentandam, antequam fortè incideremus in aliquem, qui quæsito satisfacere posset. Quapropter ut seligantur illi, quorum præ cæteris est ratio habenda: augendæ sunt radices veræ certâ quâdam quantitate, hoc est, transmutanda est æquatio in aliam, cujus veræ radices sint dato numero majores. Commodissimum autem fuerit ad id assumere 1 vel 10: quia cùm multiplicatio alicujus numeri instituitur per 1, vel 10, numerus ille sic non mutatur, sed ipsi tantùm in fine cyphra adjungitur. Vnde ponendo $y \propto x + 1$, sive $x \propto y - 1$, exsurget æquatio $y^3 - 4yy - 25y + 100 \propto 0$, cujus veræ radices unitate majores sunt veris prioris & falsæ contra unitate minores falsis. Quia verò in hac æquatione, numeri ultimum terminum 100 dividentes, sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: ideo dividenda foret per $y \pm 1$, vel per $y \pm 2$, vel per $y \pm 4$, &c. quod cum non minorem quàm in superiori requirat laborem, oportet similiter ex iis quosdam seligere. Atque adeò cum cognoscatur, ad inveniendas veras radices, divisores hujus unitate debere esse majores divisoribus prioris æquationis, facilè constat, si ex inventis, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 aliqui idonei sunt ad posteriorem æquationem dividendam, aliquos etiam inter eosdem unitate diminutos, nempe inter 0, $1'$, $3'$, $4'$, $9'$, 19, $24'$, 49, 99, ad priorem æquationem dividendam utiles futuros. Qui ut inveniantur, conferendi sunt iidem divisores

1, 3, 4′, 9′, 19, 24′, 49, 99 cum supra inventis 1′, 2, 3′, 4′, 6′, 8, 9′, 12, 18, 24′, 36, 72, sumendique qui sibi invicem respondent, cæteris neglectis. Ac proinde cum hîc quinque sint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, divisionem tentare per $x - 1$, per $x - 3$, per $x - 4$, per $x - 9$, & per $x - 24$; aut, ad obtinendas falsas, quæ quidem hâc auctione in tantum sunt diminutæ, per $x + 2$, per $x + 3$, & per $x + 6$. Quòd si verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantùm radices ad summum habere potest, quot incognita quantitas habet dimensiones, ita ut hîc non ultra tres inveniantur; poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminuere, supponendo videlicet $z \infty x - 1$, sive $x \infty z + 1$, & prodibit æquatio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \infty 0$. Cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt divisores 2, 3′, 4′, 7, 8, 15, 22, 43. Iam verò cum ex prioribus quinque 1, 3′, 4′, 9, 24 bini tantùm sint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum consentiunt, eò deventum est, ut ad inveniendas veras radices opùs tantùm sit divisionem tentare per $x - 3$, vel per $x - 4$; aut, ad obtinendas falsas, quæ hâc diminutione verarum unitate sunt auctæ, per $x + 2$, & per $x + 6$. Hinc, cum $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x - 3 \infty 0$, atque oriatur $xx + 2xx - 24 \infty 0$, cujus radices sunt $+4$, & -6; vel etiam $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x - 4 \infty 0$, & proveniat $xx + 3x - 18 \infty 0$, cujus radices sunt $+3$ & -6; vel denique $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x + 6 \infty 0$, & resultet $xx - 7x + 12 \infty 0$, cujus radices sunt $+4$, & $+3$; sequitur, radices propositæ æquationis esse $+3$, $+4$, & -6. Vbi notandum, in hujusmodi praxi seligendi divisores, non opùs esse totius operationis, quæ ad inveniendas posteriores hasce æquationes requiritur, rationem habere; sed tantùm quatenus ad ultimum terminum inveniendum inservire possit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati solummodo addendi sunt vel subtrahendi, prout signa + & — indicant. At verò cùm per denarium aliumve numerum augentur vel diminuuntur, tum priùs cyphræ ipsis in fine apponendæ sunt, vel ipsi per datos numeros sunt multiplicandi, antequam addantur vel à se invicem subtrahantur. quod usus edocebit.

Vbi tandem notandum, ad seligendos divisores divisionesque superfluas evitandas, spectari etiam posse ea, quæ Vir Clarissimus D. de Beaune de limitibus Æquationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia ista in 2do tractatu continentur, qui unâ cùm primo de natura & constitutione Æquationum huic editioni nunc accessit.

Vnde cognoscitur, valorem ipsius z esse $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, *vel* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] o
utpote qui elicitur ex priori æquatione $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$. Quæ quidem primi vel tertii casus esse potest æquationum Quadratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, si $\frac{5}{4}aa$ est minus quàm cc, quo casu $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ designabit verum valorem radicis z, & $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, falsum valorem, juxta ea quæ pag. 162 annotavimus. At tertii, si $\frac{5}{4}aa$ majus fuerit quàm cc, quo casu utraque radix est vera. Vbi porrò notandum, æquationem posteriorem $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$, postquam $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$ non fuerit minus quàm $\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive, quod idem est, cc non minus quàm $8aa$, duas admittere falsas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ sunt $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, & $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Ita ut quatuor sint radices binarum præcedentium æquationum sive æquationis

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0,$$

nempe $z \infty \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \infty \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \infty -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z \infty -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Et quandoquidem supra feceramus $z+\frac{1}{2}a \infty x$, *in-* p

notescit, quantitatem x, ad quàm cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse

$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$

vel $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel denique $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

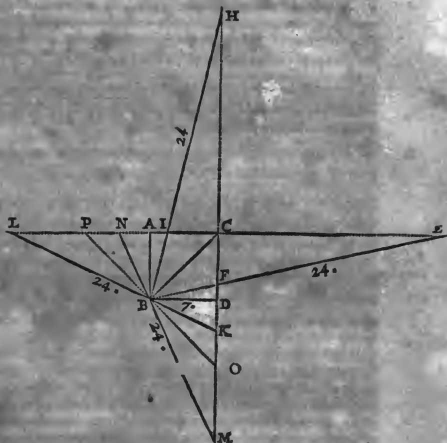
Vt liquet ex iis, quæ proximè annotata sunt.

Q *Vbi per præcedentes regulas cognoscitur, radicem ejus, quæ est longitudo lineæ D F, esse* $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$ Vbi patet, quòd ex quatuor radicibus supra expositis, æquationis $x^4-2ax^3\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}xx-2a^3x+a^4\infty 0$, quarum binæ priores semper veræ sunt, seu plus quàm 0, D. des Cartes eam tantùm sibi delegerit, quæ ad quantitatem lineæ D F, pro qua invenienda x posuerat designandam inservire possit, & reliquam veram $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ neglexerit, eò quòd lineam ipsâ D C majorem exhibeat.

Vide figuram p. 83.

Potest autem hîc eleganter ostendi usus, quem radices tam falsæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamur; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim est, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut supra indicavimus) quantitatem aliquam designant, majorem quàm nihil, & falsæ defectum alicujus quantitatis, seu quantò nihilo sunt minores, sic in Geometria veræ radices eas communiter lineas designent, sensu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò falsæ, sensu contrario. Adeò ut si veræ accipiantur in data recta indefinita, à dato puncto versùs aliquod in ea punctum designatum, progrediendo, falsæ in ipsa ab eodem puncto sumi debeant versùs contrarium punctum, regrediendo.

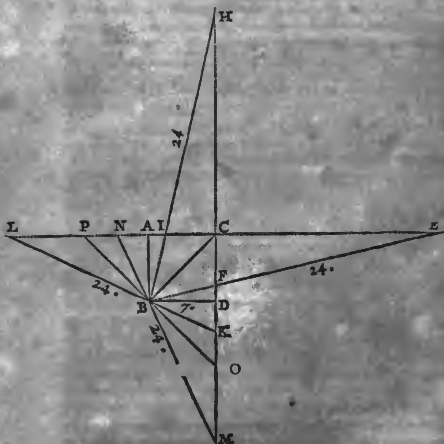
Vt,



Vt, quoniam in expoſito Problemate, ad inveniendam quantitatem lineæ D F ∞x, ſive ad cognoſcendum quanta ſumi debeat longitudo à puncto D versùs C, ut fiant quæ quæruntur, inventa eſt æquatio

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0,$$ quæ duas admittit veras radices, utpote

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$
& $\tfrac{1}{2}a$



& $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$:
hinc à puncto D versùs C ſumendæ ſunt duæ lineæ, quarum una eſt æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,
deſignans lineam D F, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,
deſignans lineam D H: deinde à puncto B ad inventa puncta F & H

F & H ducendæ rectæ B F, B H, quarum hæc secet latus A C in I, & illa idem latus productum in E: Eritque quælibet interceptarum F E, I H æqualis datæ *c*. Porrò, quoniam dicta æquatio duas quoque admittit falsas radices, quæ sunt

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

& $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}}$: ideo à puncto D, versùs alteram partem, sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una est æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

designans lineam D K, & altera æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}},$$

designans lineam D M. Quibus sic inventis, si ab inventis punctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipsi A C productæ versùs A: erit similiter unaquæque interceptarum K L, M N ipsi *c* æqualis.

Vnde apparet, quòd, etiamsi de sola D F invenienda quæstio fuerit, nec quicquam de interceptis I H, K L, & M N cogitaverimus, ipsæ tamen ultro post æquationis resolutionem sese offerant. Ita ut constet, per harum radicum cognitionem nos deduci in notitiam uniuscujusque casus, quem Problema propositum potest admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipsis est construendus ac determinandus.

Vt, quoniam, ad explicandas radices æquationis $zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$, requiritur, ut $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc$ non sit minus quàm $\tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive cc non minus quàm $8aa$ (sicut dictum est pag. 309): Sic quoque ad ducendas interceptas K L, M N opùs est, ut cc non sit minus quàm $8aa$. Quemadmodum facilè demonstrari potest, ducendo tantùm rectam O P ipsi B C perpendicularem: siquidem recta O P rectarum omnium, quæ per punctum B duci possunt, minima existit. Cujus quadratum cum duplum sit quadrati ex P C, & hoc duplum quadrati ex B C, & hoc rursus quadrati ex B D duplum: erit quadratum ipsius O P quadrati ex B D octuplum. Hæc igitur ad ducendas interceptas K L, M N Problemati præfigenda est determinatio.

Porrò, quod ad reliquas interceptas attinet, ut F E & I H, ex

ſemper ſic duci poſſunt, ut datis rectis ſint æquales, nec eſt Problema eo caſu determinationi obnoxium.

In numeris, eſto B D $\infty\ a \infty\ 7$, E F $\infty\ c \infty\ 24$, fietque æquatio quæſita $x^4 - 14x^3 - 478xx - 686x + 2401 \infty\ 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo ſecundum ejus terminum, & fit æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \infty\ 0$. Quæ ad tres dimenſiones reducta dabit æquationem $y^6 - 1103y^4 + 329375yy - 19140625 \infty\ 0$. Hæc autem cum dividi poſſit per $yy - 625 \infty\ 0$, arguitur y eſſe 25, quâ mediante dividetur æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \infty\ 0$ in duas æquationes, $zz - 25z - 50\frac{3}{4} \infty\ 0$, & $zz + 25z + 124\frac{1}{4} \infty\ 0$: fientque radices prioris $z \infty\ 12\frac{1}{2} + \sqrt{207}$, & $z \infty\ 12\frac{1}{2} - \sqrt{207}$; at poſterioris $z \infty - 12\frac{1}{2} + \sqrt{32}$, & $z \infty - 12\frac{1}{2} - \sqrt{32}$. Verùm quoniam, ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis, ſuppoſita fuit $x \infty\ z + \frac{1}{2}a$: hinc radices ejus erunt $x \infty\ 16 + \sqrt{207}$, & $x \infty\ 16 - \sqrt{207}$, ut & $x \infty - 9 + \sqrt{32}$, nec non $x \infty - 9 - \sqrt{32}$. Et liquet D F fore $16 - \sqrt{207}$, D H $16 + \sqrt{207}$, D K $9 - \sqrt{32}$, ac denique D M $9 + \sqrt{32}$.

Eodem modo, ſi B D fuerit 3, & F E 4, invenietur æquatio $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81 \infty\ 0$, quæ ſimiliter per $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit: unde ſublato ſecundo ejus termino, fiet æquatio $z^4 * - 11\frac{1}{2}zz - 75z - 10\frac{11}{16} \infty\ 0$, quæ ad tres dimenſiones reducta, dabit æquationem $y^6 - 23y^4 + 175yy - 5625 \infty\ 0$. Hæc, cum per $yy - 25 \infty\ 0$ dividi poſſit, ſequitur y fore 5. Vnde diviſâ æquatione præcedente in duas æquationes $zz - 5z - \frac{3}{4} \infty\ 0$, & $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty\ 0$, inveniemus $z \infty \sqrt{7} + 2\frac{1}{2}$, vel $z \infty \sqrt{7} - 2\frac{1}{2}$. Quæ binæ tantùm radices ex utraque æquatione erui poſſunt, cum poſterior æquatio $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty\ 0$ ſit impoſſibilis, per ea, quæ p. 165 expoſuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falſas, ſed tantùm imaginarias. Quibus radicibus ſi addatur $1\frac{1}{2}$ (quoniam ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis poſuimus $x \infty\ z + 1\frac{1}{2}$), habebitur $x \infty \sqrt{7} + 4$, vel $x \infty \sqrt{7} - 1$. Id quod monſtrat lineam D F ſumendam eſſe æqualem $\sqrt{7} - 1$, & lineam D H $\infty \sqrt{7} + 4$. Ex quibus conſtat, quòd, poſtquam æquatio inventa $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x - 81 \infty\ 0$ nullam agnoſcat radicem falſam, (quan-

(quandoquidem radices æquationis $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$, tantummodo sunt imaginariæ, & æquatio impossibilis) ideo similiter nulla linea, cujus longitudo sit 4, per punctum B duci, atque à rectis C A, C D intercipi possit.

Cæterùm, ne quid ad penitiorem intellectum harum regularum, quibus hîc in reducendis ac dividendis æquationibus usi sumus, deficiat, visum fuit sequentia adjicere.

Hinc si, exempli causâ, æquatio reducenda sit $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$, investigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ similis existit. Quocirca cum, supponendo $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$, ex mutua harum duarum multiplicatione producatur

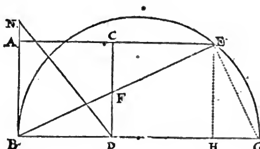
$$\begin{array}{llll} x^4 * & + zxx & - zyx & + vz \infty 0, \\ & - yy & + vy & \\ & + v & & \end{array}$$

æquatio ejusdem formæ cum proposita, elicio inde tres æquationes diversas: nimirum, $z - yy + v \infty - p$, $- zy + vy \infty - q$, & $vz \infty r$. E quibus deinde, si ad inveniendam quantitatem y, in locum z & v subrogentur earum valores $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ & $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, emerget æquatio $y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix} + pp \\ - 4r \end{smallmatrix} yy - qq \infty 0$. Inventâ autem quantitate y, loco duarum præcedentium æquationum $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$ scribo hasce duas $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \infty 0$ ac $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$. Et patet quæsitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quarum signa ab allatæ signis sunt diversa, est intelligendum, è quibus omnibus postea inter se collatis dictarum regularum veritas penitùs elucescit. Vbi etiam liquet, si valor ipsius yy per divisionem superioris æquationis Cubicæ inveniri possit, Problema, quod ad æquationem propositam $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$ perducitur, fore omnino Planum; sin minus, illud ipsum tunc esse Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore adducta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

Cum aliàs; si pro ea supponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, sed quæ simplicissima foret, perveni- R

veniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propositum non est Solidum, si quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valdè compositam, tum communiter aliâ viâ ad simpliciorem Æquationem perveniri possit.] Modus autem, quo ad Æquationem dictam pervenerim, talis est.

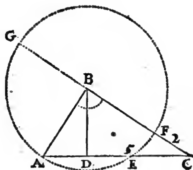


Iungatur E G, ductâque E H parallelâ ipsi C D vel A B, ponatur B D vel D C $\infty\ a$, F E $\infty\ c$, B F $\infty\ y$, & D G $\infty\ x$. Hinc cum E H æqualis sit ipsi C D vel D B, & triangulum E H G simile triangulo B D F: erit & E G æqualis B F, hoc est, $\infty\ y$. Eodem modo similia sunt triangula B G E & B E H: unde erit, ut B G, seu $a + x$, ad G E, seu y; ita B E, seu $y + c$, ad E H, seu a. Ac proinde ductis tum mediis tum extremis in se invicem, fiet æquatio inter $yy + cy$ & $aa + ax$, vel inter yy & $-cy \begin{smallmatrix} +aa \\ +ax \end{smallmatrix}$. Non secus, triangula B F D & B E H sunt similia: quare, si fiat ut B F, seu y, ad B D, seu a; ita B E seu $y + c$ ad B H; erit B H $\infty\ \frac{ay + ac}{y}$. Subductâ autem B H ex B G seu $a + x$, relinquetur H G $\infty\ \frac{xy - ac}{y}$. Porrò cum B H, H E, & H G tres sint proportionales: hinc si multiplicetur B H per H G, hoc est, $\frac{ay + ac}{y}$ per $\frac{xy - ac}{y}$, erit productum $\frac{axyy + acxy - aacy - aacc}{yy}$ æquale ei, quod fit ex H E in se, hoc est, aa; & per consequens $xyy - ayy \ \infty \ \begin{smallmatrix} +ac \\ -cx \end{smallmatrix} y + acc$, unde $yy \ \infty\ -cy + \frac{acc}{x - a}$. Cæterùm cum

cum illa, quæ eidem sunt æqualia, inter se quoque sint æqualia, erit $-cy \begin{smallmatrix}+aa\\+ax\end{smallmatrix} \infty -cy + \frac{acc}{x-a}$. Ac proinde ablatis utrinque æqualibus, reliquumque multiplicando per $x-a$, habebitur $axx - a^3 \infty acc$, ideoque $xx \infty aa + cc$. Quod erat ostendendum.

Sed lubet hîc aliud exemplum non inelegans afferre, quod mihi à Doctissimo, ac in omni studiorum genere versatissimo D. Marco Meibomio, est suppeditatum, cujus operâ Aristoxenus, Alypius, aliique Veteres Musici pristino nitori sunt restituti.

Datis trianguli rectanguli A B C, minore latere A B, & differentiâ segmentorum basis E C, invenire differentiam laterum F C.



Ponatur $AB \infty a$,
$EC \infty b$,
$FC \infty x$:
eritque $GC \infty 2a + x$.

EC	FC	GC	AC
b —	x —	$2a + x$	$\frac{2ax + xx}{b}$

$$
\begin{array}{l}
* \; 2ax + xx \\
\;\; 2ax + xx \\
\hline
+ 2ax^3 + x^4 \\
4aaxx + 2ax^3 \\
\hline
\frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{bb} \infty 2aa + 2ax + xx
\end{array}
$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4 \infty 2aabb + 2abbx + bbxx$$

$$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix}+4aa\\-bb\end{smallmatrix} xx - 2abbx - 2aabb \infty 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per x 8 a, vel per x 8 b, vel per x 8 $2a$, vel per x 8 $2b$, hinc tollendus est secundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantùm dimensiones habentem: quod fiet ponendo $z - a \infty x$

$$
\begin{array}{llllll}
z^4 - 4az^3 + & 6aazz - & 4a^3z + & a^4 & \infty & x^4 \\
+ 4az^3 - & 12aazz + & 12a^3z - & 4a^4 & \infty & + 4ax^3 \\
+ & 4aazz - & 8a^3z + & 4a^4 & \infty & + 4aaxx \\
- & bbzz + & 2abbz - & aabb & \infty & - bbxx \\
 & - & 2abbz + & 2aabb & \infty & - 2abbx \\
 & & - & 2aabb & \infty & - 2aabb. \\
\hline
z^4 \;\; * & \begin{smallmatrix}-2aa\\-bb\end{smallmatrix} zz & * & \begin{smallmatrix}+a^4\\-aabb\end{smallmatrix} & \infty & 0.
\end{array}
$$

Quia autem hîc post sublationem secundi termini contingit æquationem esse Quadratam, cum in ea desit z^3 & z: non opùs est ulteriùs progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro sunt ostensa inveniri possit. Erit enim

$$zz \infty aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb},$$

$$\& \; z \infty \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}, \text{ ac proinde}$$

$$x \infty - a + \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}.$$

Vbi notandum, si pro majori latere B C ponatur x, æquationem quæsitam fore quadratam: utpote,

$x^4 * \begin{smallmatrix}-2aa\\-bb\end{smallmatrix} xx * \begin{smallmatrix}+a^4\\-aabb\end{smallmatrix} \infty 0$, sive $x^4 \infty \begin{smallmatrix}+2aa\\+bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-a^4\\+aabb\end{smallmatrix}$, cujus radix est $xx \infty aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}$, hoc est,

$x \infty \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}.$ Cujus sanè cum præcedente convenientia ex ipso schemate est perspicua. Quòd si verò pro A E, duplo minori segmento, ponatur x, fiet Æquatio $xx \infty - bx + 2aa$, cujus radix est $x \infty - \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + 2aa}$.

Quæ

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non dissimilis erit quæstio, si datis A B $\propto a$, & D C $\propto b$, quæratur F C $\propto x$. Fiet enim æquatio
$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix}+6aa\\-bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4a^3\\-2abb\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+a^4\\-2aabb\end{smallmatrix} \propto 0$. In qua si tollatur secundus terminus, ponendo scilicet $z - a \propto x$, prodibit æquatio $z^4 * - bbzz * - aabb \propto 0$, sive $z^4 \propto bbzz + aabb$, cujus radix est $zz \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, hoc est,
$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$, adeoque $x \propto -a + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Sed si quæratur B C $\propto x$, erit æquatio $xx \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, cujus radix est $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Cujus cum præcedente consensus ex figura perspicitur. Denique si quæratur A D, habebitur æquatio $xx \propto -bx + aa$, cujus radix est $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Quod similiter superioris moniti non inelegans est exemplum.

His adde sequentem quæstionem, quam olim ab Arithmetico subtilissimo, D. Nicolao Huberti à Persyn, Harlemensi, fautore meo honorando, solvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate se invicem excedentes, qui inter se multiplicati faciant 100.

Ponatur primus x, secundus $x + 1$, tertius $x + 2$, & quartus $x + 3$. Fietque æquatio $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \propto 100$, vel $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \propto 0$. cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Divisio verò tentata per x 8 1, vel per x 8 2, vel per x 8 4 &c. non succedit. Hinc sublato secundo termino, prodibit æquatio $z^4 * - 2\frac{1}{2}zz * - 99\frac{7}{16} \propto 0$, vel $z^4 \propto 2\frac{1}{2}zz + 99\frac{7}{16}$, cujus radix est $zz \propto \sqrt{101} + 1\frac{1}{4}$, hoc est, $z \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}}$. Ac proinde, cum ibi tollendo secundum terminum posuerimus $x \propto z - 1\frac{1}{2}$, fiet $x \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$. Eritque quæsitorum numerorum, primus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, secundus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, tertius $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, & quartus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$. Quod facilè probari potest.

Vbi notandum, si cum hujus quæstionis Authore pro primo numero ponamus $x - 1\frac{1}{2}$, pro secundo $x - \frac{1}{2}$, pro tertio $x + \frac{1}{2}$,

pro

pro quarto $x + 1\frac{1}{2}$, quæstionem faciliùs solvi posse. Invenitur enim æquatio $x^4 \infty 2\frac{1}{2}xx + 99\frac{7}{16}$, omnino ut præcedens, denominata à radice z: unde quæsiti numeri fiunt ut supra. Verùm difficile satis foret in hasce hypotheses incidere, non secus quàm in superiorem Pappi constructionem, sicut Author innuit pag. 83.

Restat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum existit. Quale est illud, quod ante annos aliquot sibi ad investigandum proposuit Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. Ioannes de Wit, Consiliarius & Pensionarius sive primarius Hollandiæ West-Frisiæque minister, Mathematum peritissimus. à quo insignem tractatum, brevi, si volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Cartesius exponit.

Datis in superiori triangulo rectangulo A B C, segmento basis D C ∞a, & differentiâ laterum C F ∞b; invenire A B, latus minus.

Esto A B ∞x, fietque æquatio $x^4 + 4bx^3 \begin{smallmatrix} +6bb \\ -2aa \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +4b^3 \\ -2aab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +b^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per x 8 b, tollo secundum ejus terminum, statuendo $z - b \infty x$, unde emergit æquatio $z^4 * - 2aazz + 2aabz - aabb \infty 0$, quippe quæ invenitur, quærendo latus majus B C. Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantum dimensiones habentem, juxta regulam pag. 79., fietque æquatio $y^6 - 4aay^4 \begin{smallmatrix} +4a^4 \\ +4aabb \end{smallmatrix} yy - 4a^4 b.b \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, constans ex quantitate incognitâ yy 8 quantitate cognitâ, ultimum terminum $4a^4bb$ dividente, indicio est, Problema propositum esse Solidum, adeoque non nisi per Conicas sectiones solvi posse. Neque minus vitium est, solutionem ejus post hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas sectiones ad constructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos construi possunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, esto D C ∞ 5, C F ∞ 2, A B ∞ 1 ℞, eritque æquatio 1 ℨℨ + 8 ¢ — 26 ℨ — 68 ℞ — 84 ∞ 0. Quæ cum dividi non possit per 1 ℞ plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 84 dividente, aufero secundum terminum 8 ¢, & fit, 1 $QQ * - 50\,Q + 100\,N - 100 \infty 0$. Hæc autem ad tres dimen-

mensiones reducta producit $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \infty 0$. quæ cum similiter dividi non possit per $xx +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente: sequitur Problema in datis numeris esse Solidum, lineamque A B per planorum Geometriam sive per regulas primo libro expositas non posse inveniri.

Non dissimilis erit quæstio, si, datis A D ∞a, F C ∞b, quæratur B C ∞x. Invenitur enim æquatio

$x^4 - 4bx^3 \substack{+6bb \\ -2aa} xx \substack{-4b^3 \\ +4a\,\text{[illegible]}} x \substack{+b^4 \\ -aabb} \infty 0$. Vnde ponendo $x \infty z + b$, emerget æquatio $z^4 * - 2aazz - 2aabz - aabb \infty 0$. eadem nempe, quæ provenit, quærendo A B ∞z.

Porrò, si exemplorum copiam desideres, potes rursus ex iisdem datis quærere E C ∞x, & habebis

$x^4 + 4ax^3 \substack{+4aa \\ -2bb} xx - 8abbx \substack{-8aabb \\ +b^4} \infty 0$. Cujus secundum terminum si tollas, ponendo $z - a \infty x$, obtinebis $z^4 * \substack{-2aa \\ -2bb} zz$

$-4abbz \substack{+a^4 \\ -2aabb \\ +b^4} \infty 0$, eandem, quam si quæras D C ∞z.

Vbi si denique quæras B D, invenies hanc æquationem:

$x^8 \substack{-2a^4 \\ -2aabb} x^4 - 4a^4bbxx \substack{+a^4b^4 \\ +a^8 \\ -2a^6bb} \infty 0$. Sed hæc forsan nimia videbuntur.

E quibus colligere licèt: quòd, Problemate aliquo Solido existente, si per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compositam, communiter etiam per aliam viam ad simpliciorem deveniri possit, veruntamen pauciores quàm tres dimensiones non habentem.

Iam verò postquam compertum est, Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum ascendat; sive ipsa non altiùs quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum sectionum, quæcunque illa tandem sit, &c.] Ex his notandum est, quoties in proposita quæstione data est aliqua Conica sectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantùm dimensiones ascendit, tunc eam semper ope illius datæ Conicæ sectionis per solam regulam & circinum solvi posse. Adeò ut pro Plano Problemate haberi quodammodo possit, etiamsi reverâ sit Solidum, ut etiam ab Authore hîc appellatur.

Hujus rei elegans exemplum ſuggerere poteſt Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in ſcholio Prop^{nis} 30 libri 4^{ti} Collectionum Mathematicarum. In cujus ſolutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc eſt, per improprium genus ſolvere quæſiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctiſſimus ac de Mathematicis ſtudiis perinde meritus Alexander Anderſonus in exercitatione ſua 5ta dictum Problema non levibus indiciis ſequentis argumenti fuiſſe innuit, ſeque ibidem ſcribit Analyticâ ſuâ duce tandem repeгiſſe abſque ſolida inclinatione (ut Pappus loquitur) non poſſe definiri: viſum fuit id ipſum hîc loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus iſtis ſic diſſentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim ſi in hujus Problematis ſolutione inveſtiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæſita recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen ſecundùm regulam generalem p. 85 ope ejuſdem datæ Parabolæ quàm facillimè conſtrui poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonſtrationem univerſalem, quam ſibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutiſſimus pariter atque eruditiſſimus noſter Chr. Hugenius concinnavit, cum ipſa jam pridem nobis aliiſque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci exiſtat, eandem hîc prætereundam duximus.

T *Atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam*: $z^3 \propto * \, a p \, z . \, a a q$, *ſi incognita quantitas tres tantùm dimenſiones habeat; aut ad hanc*: $z^4 \propto * \, a p \, z z . \, a a q \, z . \, a^3 r$. *ſi quatuor obtineat dimenſiones; ſeu, ſumendo a pro unitate, ad hanc*: $z^3 \propto * \, p \, z . \, q$; *aut ad hanc*: $z^4 \propto * \, p \, z z . \, q \, z . \, r$.] Vbi apparet, hujus Geo-

Geometriæ Methodum requirere, ut, literæ, quæ in priori æquatione pro unitate est accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in posteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino zz est accepta, quadratum reperiatur in termino z, ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim si habeatur æquatio $z^3 \infty * bbz . c^3$, ac illius loco alia desideretur, cujus penultimus terminus habeat a, ac ultimus aa: Fiat ut a ad b, sic b ad quartam, quæ vocetur p: eritque $ap \infty bb$; Rursus, fiat ut aa ad cc, sic c ad quartam, quæ sit q; sive etiam (quòd eòdem redit) ut a ad c, sic c ad tertiam, quæ vocetur d; ac denuo ut a ad d, sic c ad q: eritque $aaq \infty c^3$. Vnde pro $z^3 \infty * . bbz . c^3$ scribi poterit $z^3 \infty * apz . aaq$, sive, sumendo a pro unitate: $z^3 \infty * . pz . q$.

Nec aliter fit si habeatur $z^4 \infty * bbzz . c^3z . d^4$. Substituto enim ap in locum bb, & aaq in locum c^3 (ut ante), faciendum est, ut a ad d, sic d ad quartam, quæ vocetur e, eritque $ae \infty dd$, ideoque $aaee \infty d^4$. Vbi rursus, si fiat, ut a ad e, ita e ad tertiam, quæ vocetur r, erit $ar \infty ee$, ac proinde $a^3r \infty d^4$. Ita ut pro æquatione propositâ $z^4 \infty * . bbzz . c^3z . d^4$ reponi possit $z^4 \infty * apzz . aaqz . a^3r$, sive, sumendo a pro unitate: $z^4 \infty * . pzz . qz . r$. Quod erat ostendendum. Eadem est ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò constat, quanti sit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro ostensam, non solùm ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimensionum ita præparentur, ut hæ juxta unam & illæ juxta aliam regulam resolvi queant; sed ipsæ etiam hoc pacto designatæ ad numeros referri, atque ad ipsarum radices explicandas inservire possint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia existat, edoceant.

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, & axem ejus esse A C D K L, latusque rectum a seu 1.] V Vbi liquet, quòd, postquam in æquatione resolvenda quantitatem a seu unitatem, ut proximè est explicatum, subrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ F A G assumpsimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejusdemque Parabolæ ope solvi possint. Cum enim reduci semper queant ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, superiorum for-

mularum, & una eademque quantitas a in earundem æquationum terminis subrogari semper possit, evidens est, ipsam unius ejusdemque Parabolæ ope construi posse. Idem intelligendum quoque est de æquationibus numericis trium quatuorve dimensionum, quarum nulla ex radicibus est rationalis, quarumque valor similiter per sectionem Conicam est determinandus. Vt supra fuit ostensum.

Vide figuram p. 86 vel 89.

Cæterùm ut hæc regula cuivis perspecta reddatur, concipiatur Parabola esse descripta F A G, cujus latus rectum sit $\infty\, a$, seu 1, & in axe ejus A D K L assumptâ A D $\infty\, b$, fingatur ex D eidem perpendicularis esse erecta D E $\infty\, c$, centroque E intervallo E H $\infty\, d$ descriptus circulus F H G, qui Parabolam ab utraque parte axis secet in G & F: oporteatque investigare æquationem, cujus radix sit perpendicularis G K aut F L $\infty\, z$.

Ad quam inveniendam, dividatur zz, quadratum ex G K, per latus rectum seu a, & fit A K $\infty\, \frac{zz}{a}$. E qua subductâ A D $\infty\, b$, relinquetur D K seu E M $\infty\, \frac{zz}{a} - b$. Deinde, quoniam additis E D, hoc est, M K, & K G, tota M G est $\infty\, c + z$; & quadrata ex E M & M G simul addita faciant $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz$, quadratum ex E G: erit $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty\, dd$, hoc est, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio

$$z^4 \infty\, * \begin{array}{l} +2abzz \\ -aa \end{array} - 2aacz \begin{array}{l} +aadd \\ -aabb \\ -aacc \end{array}$$

Eadem quippe, quæ invenitur, ponendo F L $\infty\, -z$. Hinc si, exempli caussâ, æquatio proposita construenda fuerit $z^4 \infty\, * + apzz - aaqz + a^3r$: erit, factâ separatim comparatione inter singulos terminos unius & singulos alterius, $b \infty\, \frac{a+p}{2}$, $c \infty\, \frac{1}{2}q$, & $d \infty\, \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$. Quod illud ipsum est, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum casuum constructio inveniri potest. Idem intellige de constructione æquationis pag^{næ} 97, aliarumque hîc sequentium.

VV *Adeò ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.*] Quoniam autem, quo

quo pacto Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modò jucundum quin imò utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingeniosissimo atque integerrimo nostro Huddenio inventam, quâ ejusdem æquationis radices, prout ipsa ad hanc formam $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0$ aut ad hanc $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$ est revocata, ita ut omnes termini per signa + & — se invicem sequantur, inveniri valeant.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0.$$

Ductis AB, AC, rectum angulum A efficientibus, sumptâque in AB lineâ AD $\infty \frac{1}{4}p$, agatur ex D ipsi AC parallela DF. Deinde in hac invento puncto E, ita ut id, quod sub AD, DE continetur, sit $\infty \sqrt{s}$, describatur per E circa Asymptotos AB, AC Hyperbola HEh.

Porrò aſſumptâ D F $\infty\ \frac{r}{2\sqrt{s}}$, jungatur A F; & ſuper A F deſcripto ſemicirculo A D F, collocetur in eo A G $\infty \sqrt{q}$, centroque F circulus deſcribatur, tranſiens per inventum punctum G. Qui quidem Circulus Hyperbolam ſecabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diverſas radices admittet, à quibus ſi ad lineam A C demittantur perpendiculares H I, h i, & *hi*: erunt ipſæ radices quæſitæ.

Vbi notandum, ſi A G major inveniretur, quàm ut ſemicirculo ſuper A F deſcripto inſcribi poſſet; aut etiam Circulus G H *h* adeò parvus eſſet, ut Hyperbolam H E *b* in nullo prorſus puncto ſecaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non eſſet imaginaria.

Demonſtratio.

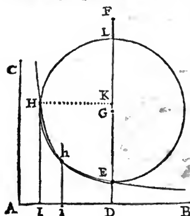
Etenim lineâ I H exiſtente $\infty\ z$, cum id, quod ſub A D, D E vel ſub A I, I H continetur, ſit $\infty \sqrt{s}$: erit A I ſeu D K $\infty\ \frac{\sqrt{s}}{z}$. Vnde cum D F & D K à ſe invicem ſubductæ relinquant K F, & D F ſit $\infty\ \frac{r}{2\sqrt{s}}$: erit K F $\infty\ \frac{r}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{z}$ ſeu $\frac{\sqrt{s}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{s}}$, adeoque $\square$ K F ſemper $\infty\ \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s}$. Eſt autem K H $\infty\ z - \frac{1}{2}p$ ſeu $\frac{1}{2}p - z$, ac proinde $\square$ K H ſemper $\infty\ zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hinc ſumma utriuſque ſimul, hoc eſt, $\square$ F H erit $\infty\ \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hoc verò cum æquetur $\square^{to}$ A F $- \square^{to}$ A G, hoc eſt, $\infty\ \frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4s} - q$: fiet, ordinatâ æqualitate, $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s\ \infty\ 0$. Quæ eſt æquatio propoſita. Vnde liquet I H eſſe $\infty\ z$.

CON-

CONSTRVCTIO ÆQVATIONIS

$z^3 - pzz + qz - r \infty 0.$

Ductis, ut ante, AB, AC, & in AB assumptâ AD $\infty \sqrt{q}$, agatur ex D ipsi AC parallela DF. Deinde in hac acceptis DE $\infty \frac{r}{q}$, & EF ∞p, describatur per E circa Asymptotos AB., AC Hyperbola EhH. Porrò sectâ DF bifariam in G, centro G & intervallo GE describatur circulus EHL, qui quidem Hyperbolam in tot punctis præter E secabit vel tanget, quot æquatio diversas radices admittet, è quibus si ad lineam AB demittantur perpendiculares HI, hi, erunt ipsæ radices quæsitæ.



Demonstratio.

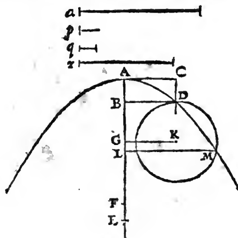
Quoniam, HI existente ∞z, AI, per supra dicta, est $\infty \frac{r}{qz}\sqrt{q}$, & eadem ab AD subducta relinquit ID vel HK $\infty \sqrt{q} - \frac{r}{qz}\sqrt{q}$: erit □ ex HK $\infty q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz}$. Deinde, quoniam DE $\infty \frac{r}{q}$ ablatâ ex DK seu IH ∞z, relinquitur EK $\infty z - \frac{r}{q}$; at verò DK ∞z subtractâ ex DL seu EF ∞p, relinquitur KL $\infty p - z$: erit ▭ EKL $\infty pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Hinc cum □ ex HK æquetur ▭ EKL, erit $q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz} \infty pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Et fit, ordinatâ æqualitate,

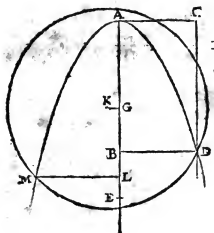
$$\begin{array}{l} z^4 - \frac{r}{q}z^3 + qzz - 2rz + \frac{rr}{q} \infty 0. \\ \qquad\quad - p \qquad\qquad\quad + \frac{pr}{q} \end{array}$$

Quæ

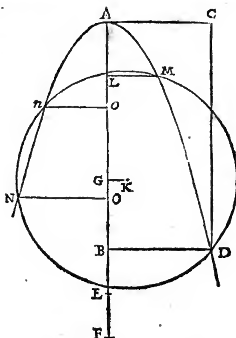
Quæ æquatio dividi potest per $z - \frac{r}{q} \infty o$, & fit $z^3 - pzz + qz - r \infty o$, æquatio proposita. Vnde liquet HI esse ∞z.

His subjunge sequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ, in quibus 2[dus] terminus non est sublatus, construi possunt, prout ipsæ ad hanc formam $z^3 \infty pzz . aqz . aar$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . aar$; sive etiam (sumendo a pro unitate) ad hanc $z^3 \infty pzz . qz . r$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . r$, sunt reductæ. Ea autem talis est.





De-



Descriptâ Parabolâ N A M, cujus axis sit A B E, & latus rectum ∞ *a* seu 1, erigo ex vertice A, ad dextram Parabolæ, super axe, perpendicularem A C ∞ *p*; & ex C ductâ C D ipsi A B parallelâ, donec Parabolæ occurrat in D, duco ex D ipsi A C parallelam D B, occurrentem axi in B. Dehinc in linea A B, continuatâ versùs B, sumendo B E ∞ 1, oportet facere E F ∞ *q*, eamque ulteriùs in illa versùs hanc eandem partem sumere, si habeatur $+q$ in æquatione; sed versùs alteram partem, si habeatur $-q$. Porrò sectâ A F bifariam, aut A E, si *q* sit nulla; in G, si habeatur $-p$, & *q* & *r* diversis signis sint adfectæ; aut etiam si habeatur $+p$, & *q* & *r* iisdem signis denotatæ fuerint, erigenda est ex G perpendi-

pendicularis G K $\infty \frac{r + pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eaque ad dextram collocanda, si p & r diversa signa habeant, aut ad sinistram, si eadem. Vel contra, si habeatur $-p$, & q & r iisdem signis adficiantur; aut etiam si habeatur $+p$, & q & r diversis signis designentur, oportet facere G K $\infty \frac{r = pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eamque, ut ante, ad dextram sinistramve collocare, si r sit major quàm pq; vel contra, si r minor sit quàm pq. Quo peracto, si ex K circulus describatur, transiens per punctum D, secabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter D, quot æquatio diversas radices admittet; è quibus si ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quàm veræ. Quarum quidem veræ, ut M L, ad dextram cadent, & falsæ, ut N O, ad sinistram, si habeatur $-p$ in æquatione. Sed contra, si habeatur ibi $+p$, veræ cadent ad sinistram, & falsæ ad dextram.

Signum = significat differentiam, quæ est inter r & pq.

Cujus quidem demonstrationem, cum eodem modo fieri possit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis studio hîc omittimus.

Vbi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2[dus] terminus est sublatus, si tantùm in iis p intelligamus esse ∞ 0, & veras radices ex eadem parte Parabolæ esse sumendas, quâ erecta est perpendicularis G K, & falsas ex altera, cùm habetur $+r$ in æquatione; aut contra, si in ea habetur $-r$.

Cæterùm cum & alias regulas huc afferre possem, quibus hæ eædem æquationes sicut & superiores Quadrato-quadratæ construi queunt: tamen, ne in iis hîc recensendis nimis longus sim (quandoquidem infinitas invenire licet), suffecerit jam allatas, tanquam faciliores exposuisse, cæterasque etiam aliis quærendas reliquisse.

X *Falsa autem F L æqualis est duabus hisce Q N & N V simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.*] Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hîc obiter adnotat Au-

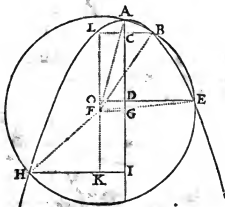
ctor,

ctor, & ad quam investigandam me ante annos aliquot Parisiis instigavit Doctissimus, ac Mathematum peritiâ, non minùs quàm omnigenâ virtute, ornatissimus vir D. Claudius Mylon, I. C, sicut à me tum inventa fuit, sequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quòd si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

Sit Parabola H A B E, cujus axis A I, vertex A, Circulus autem ipsam secans H B E. Qui quidem primò transeat per verticem, seceteque Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in punctis B & E. Demissis autem ex punctis H, B, & E in axem



perpendicularibus H I, B C, & E D: ostendendum est, H I æqualem esse ipsis B C & E D simul sumptis.

Esto latus rectum Parabolæ ꝏ a, C B ꝏ c, D E ꝏ d, H I ꝏ z, A G ꝏ x, & F G ꝏ y. Hinc cum, per 11 propositionem 1 libri

Conicorum Apollonii, latus rectum seu a sit ad C B seu c, ut C B seu c ad A C: erit A C $\infty \frac{cc}{a}$. Eâdem ratione cum sit ut latus rectum ad D E, ita D E ad A D: erit A D $\infty \frac{dd}{a}$. Similiter, quoniam latus rectum est ad H I, ut H I ad I A: erit A I $\infty \frac{zz}{a}$. Vnde, si auferatur A C $\infty \frac{cc}{a}$ ex A G ∞x, relinquetur C G seu L F $\infty x - \frac{cc}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ L B $yy + 2cy + cc$, erit summa $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, quadratum rectæ F B, per 47 prop. 1mi lib. Elementorum. Sic etiam, si addantur quadrata ipsarum A G & G F, nimirum, xx & yy, erit summa $xx + yy$ quadratum rectæ F A. Quoniam autem in Circulo rectæ lineæ, à centro ad circumferentiam ductæ, sunt æquales; erunt quoque rectæ F B F A æquales, unde & earum quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx + yy$. Quæ quidem æqualitas, si ritè ordinetur, dabit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$.

Eodem modo auferendo A D $\infty \frac{dd}{a}$ ex A G ∞x, relinquetur

GD

GD seu FO $\infty x - \frac{dd}{a}$. Cujus quadrato $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa}$ si addatur quadratum ex EO $dd + 2dy + yy$, erit summa $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ quadratum ex FE. Quod similiter adæquetur quadrato ex FA $xx + yy$, atque æquatio ritè ordinetur, ut inveniatur rursus $x \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$.

Quia verò, quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac} \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$. In qua æquatione, si multiplicemus per crucem, atque post æqualium ex æqualibus subductionem, ita transferamus quantitates, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per $d - c$, orietur $cdd + ccd \infty 2aay$.

Similiter, si ex AI $\infty \frac{zz}{a}$ auferatur AG ∞x, relinquetur GI seu FK $\infty \frac{zz}{a} - x$. cujus quadrato $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx$ si addatur quadratum ex HK $zz - 2yz + yy$, erit aggregatum $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2yz + yy$ quadratum ex HF. Quod item ob rationem supradictam quadrato ex FA seu $xx + yy$ erit æquale. Quibus adæquatis, si æquatio ritè ordinetur, constabit tertiò $x \infty \frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$.

Quoniam autem primò inventa fuit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$, erunt itidem $\frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$ & $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$ inter se æqualia. Quocirca, si multiplicatio fiat per crucem, atque, post æqualium ex æqualibus ablationem, quantitates transferantur, ut utra æqualitatis pars dividi possit per $z + c$: orietur $czz - ccz \infty 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $2aay \infty cdd + ccd$, erunt itidem $czz - ccz$ & $cdd + ccd$ inter se æquales. Quam æquationem si porrò per c dividamus, atque quantitates unius partis transferamus in aliam sub contrario signo, fiet $zz - cz \begin{matrix} -dd \\ -cd \end{matrix} \infty 0$.

Postquam igitur evolvimus atque enodavimus propositionis data, donec tandem pervenerimus ad æquationem $zz - cz \begin{matrix} -dd \\ -cd \end{matrix} \infty 0$, restat ut illa quæsito respondeat, atque ejus beneficio propositi

 veritas

veritas eluceat, modò ex datis elici possit. Ideoque tentatâ divisione ejusdem æquationis per $z - c - d \infty 0$, ut constet, num verum sit, quod intenditur, nempe, z æquari $c + d$: reperitur divisionem fieri posse, & oriri $z + d \infty 0$. Et manifestum fit, z æquari $c + d$, sive HI æqualem esse ipsis BC, ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde patet, si Circulus, transiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc est, rectas CB, DE sibi invicem æquales faciat, tunc quidem HI ipsius CB seu DE duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, fiet æquatio $zz - cz - 2cc \infty 0$. Quæ dividi poterit per $z - 2c \infty 0$, & orietur $z + c \infty 0$. Id quod arguit z valere $2c$, hoc est, HI ipsius CB seu DE duplam esse.

Sed non transeat circulus HBE per verticem A, verùm secet Para-

Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in tribus punctis E, B, & M: Dico similiter H I æqualem esse ipsis E D, B C, & M N simul sumptis.

Positis enim iisdem quæ priùs, esto præterea M N ∞ b. Vnde, simili ratione, quâ ante, A N erit $\frac{bb}{a}$. Sublatâ autem A N ex A G ∞ x, relinquitur N G seu P F ∞ $x - \frac{bb}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ M P ∞ $bb + 2by + yy$, erit summa $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ quadratum rectæ F M.

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ F B & F M sunt æquales, erunt quoque eorundem quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde, si demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per aa, atque quantitates in x ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy - 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $c - b$, & orietur $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \infty 2acx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ac + 2ab$, & orietur $x \infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ F E & F M sint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe, $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquisque ductis in aa, transeant porrò quantitates in x ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fietque $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur utraque pars per $d - b$, orieturque $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \infty 2adx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ad + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$.

Iam verò, quoniam, quæ uni æqualia sunt, illa quoque inter se sunt.

ſunt æqualia, erit $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$

$\propto \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Brevitatis verò causâ pro $b^3 + 2aay + aab$ ſcribatur $+ e^3$ ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, ſeu (quod idem eſt) diviſo utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + bbcd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 \propto c^3d + c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc + de^3 + be^3$. Et, deletis utrinque æqualibus, reſtituatur valor quantitatis aſſumptæ e^3, habebiturque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + b^3d + aabd + b^3c + 2aacy + aabc \propto c^3d + c^3b + bccd + bbcc + b^3c + aabc + b^3d + aady + aabd$. Rurſus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & diviſio tandem inſtituatur per $d - c$, orieturque $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc \propto 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM ſint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Vnde ſublatis utrinque æqualibus, reliquiſque per aa multiplicatis, ſi transferantur porrò quantitates, ita ut, quæ in x ductæ ſunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4 - b^4 - 2aazy - 2aaby + aazz - aabb \propto 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z + b$, orieturque $z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab \propto 2azx - 2abx$. Et rurſus utrinque per $2az - 2ab$, fietque

$$x \propto \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}.$$

Quoniam verò ſuperiùs inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$, hinc $\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$ & $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$ erunt quoque inter ſe æqualia.

Bre-

Brevitatis autem causâ rursus pro $+b^3+2aay+aab$ scribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3-2aay-aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+bbcz+b^3z+aacz+aabz-ce^3-be^3 \propto c^3z-bc^3+bccz-bbcc+bbcz-b^3c+aacz-aabc+ze^3-be^3$. Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, & fit $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+b^3z+aabz-b^3c-2aacy-aabc \propto c^3z-bc^3+bccz-bbcc-b^3c-aabc+b^3z+2aayz+aabz$. Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituatur divisio per $z+c$, & orietur $2aay \propto czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc$.

Verùm cum & supra inventum fuerit $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \propto 2aay$, &, quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit $czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc \propto cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, fietque

$$\begin{array}{lll} czz \propto & +ccz & +cdd \\ +b & +2bc & +ccd \\ & +bb & +bdd \\ & & +2bcd \\ & & +bbd \end{array}$$

Deinde dividatur utrobique per $c+b$, ut oriatur

$$\begin{array}{lll} zz \propto & +bz & +dd \\ & +c & +bd \\ & & +cd \end{array}$$

sive translatis omnibus ad unam partem:

$$\begin{array}{lll} zz & -bz & -dd \propto 0. \\ & -c & -bd \\ & & -cd \end{array}$$

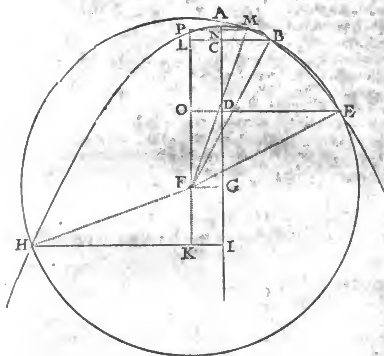
Postquam igitur percurrimus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem

$$zz \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} z \begin{array}{l} -dd \\ -bd \\ -cd \end{array} \propto 0,$$

superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantùm quidem ex suppositis datis de-

duci potest. Hunc in finem tentanda erit divisio æquationis per $z - b - c - d \infty o$, ut constet num verum sit, quod intenditur. Quare cum tentatâ divisione reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \infty o$, sequitur quoque quæsitum propositionis esse verum, hoc est, z æquari $b + c + d$, sive H I æqualem esse ipsis M N, B C, & E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde liquet, si circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in M vel B, hoc est, rectas N M, C B sibi invicem æquales faciat, tunc H I æqualem fore ipsi D E, unà cum dupla ipsius N M vel C B. Si enim in hac ultima æquatione pro c scribatur b,



fiet æquatio $z z - 2 b z - dd - 2bd \infty o$, quæ dividi poterit per $z - d - 2b \infty o$, & orietur $z + d \infty o$. Id quod arguit z valere $d + 2b$,

$d + 2b$, hoc eſt, H I æqualem eſſe compoſitæ ex D E & dupla N M ſeu C B.

Præterea hinc conſtat, (quod ſanè animadverſione dignum) ſi recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipſa ibidem quoque tangatur à Circulo non per verticem tranſeunte, quique Parabolam in eodem puncto ſecet, hoc eſt, ut rectæ N M, C B, & D E omnes tres ſint inter ſe æquales: quòd tunc quidem H I ipſius N M, C B, vel D E tripla ſit futura. Quippe conſiderando N M vel C B bis ſumendam eſſe, propter hujus rectæ contactum in M vel B, ac deinde adhuc ſemel, propter Circuli & Parabolæ in eodem puncto interſectionem. Vel etiam in æquatione inventa

$$\begin{array}{l} zz - bz - dd \infty 0 \\ - cz - bd \\ - cd \end{array}$$

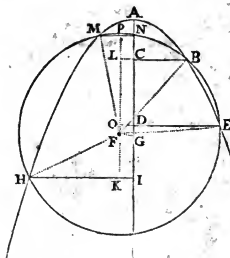
pro c & d ſcribendo b, ac deinde $zz - 2bz - 3bb \infty 0$ dividendo per $z - 3b \infty 0$. oritur namque $z + b \infty 0$. Id quod arguit z valere $3b$, hoc eſt, H I triplæ ipſius N M, C B, vel D E eſſe æqualem.

Denique ſecet Circulus H B E Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; iſtinc verò in B & E. Dico itidem H I, M N ſimul ſumptas ipſis B C, E D ſimul ſumptis eſſe æquales.

Poſitis enim iiſdem quæ priùs, invenietur ſimiliter, ſicut ante oſtendimus, quadratum ex F M eſſe $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ F B & F M ſunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Vnde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per aa multiplicatis, ſi transferantur porrò quantitates in x ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy + 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Diviſâ autem utrâque parte per $c + b$, orietur $c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab \infty 2acx - 2abx$. Vbi rurſus ſi utrinque dividatur per $2ac - 2ab$, orietur $x \infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ F E & F M ſint æquales, erunt etiam earum quadrata $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ &

 $xx -$



$xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Quare si demantur utrobique æquales, & reliquæ ducantur in aa, nec non quantitates in x ductæ disponantur ad unam, reliquæ verò ad alteram æquationis partem constituendam, fiet $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \propto 2addx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $d + b$, & proveniet $d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab \propto 2adx - 2abx$, & rursus utrinque per $2ad - 2ab$, orieturque $x \propto \frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$.

Quia verò quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$ $\propto \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$. Brevitatis autem causâ pro $- b^3 + 2aay - aab$ scribatur, propter earundem quantitatum amphiboliam, $\between e^3$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd + bbcd - b^3d + aacd - aabd \between ce^3 \between be^3 \propto c^3d - c^3b - bccd + bbcc + bbcd - b^3c + aacd - aabc \between de^3 \between be^3$. Et, deletis

Signum $\between$ significat + vel —. Signum $\between$ significat + vel — sensu contrario

tis utrinque æqualibus, restitutoque valore quantitatis assumptæ $8\,e^3$; fiet $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd - b^3d - aabd - b^3c + 2aacy - aabc \infty c^3d - c^3b - bccd + bbcc - b^3c - aabc - b^3d + 2aady - aabd$. Vbi si demum demantur utrobique æquales quantitates, & quæ in y ductæ sunt transferantur, ut unam faciant æquationis partem, reliquæ autem alteram, ac tandem divisio instituatur per $d - c$, orietur $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \infty 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM æquales sint, erunt quoque earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Vnde ablatis utrinque æqualibus, reliquisque multiplicatis per aa, adhibeatur porrò translatio, ut quantitates in x ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fietque $z^4 - b^4 + 2aaby - 2aazy + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z - b$, & orietur $z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab \infty 2azx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2az + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$.

Quia verò & supra quantitas x inventa fuit $\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$, erunt $\frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$ & $\frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ inter se æqualia. Brevitatis caussâ, scribatur rursus $8\,e^3$ pro $-b^3 + 2aay - aab$, & $8\,e^3$ pro $+b^3 - 2aay + aab$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz + bbcz - b^3z + aacz - aabz\ 8\ ce^3\ 8\ be^3 \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + aacz + b^3c + bbcz + aabc\ 8\ ze^3\ 8\ be^3$. Ablatis porrò utrinque æqualibus, restitutisque valoribus quantitatum assumptarum $8\,e^3$ & $8\,e^3$, fiet $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz - b^3z - aabz + b^3c - 2aacy + aabc \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + b^3c + aabc - b^3z + 2aazy - aabz$. Vbi si rursus utrobique demantur æquales, & quantitates in y ductæ ad unam partem

prioris signi, h.e., cum per signum 8 intelligitur +, tum per signum 8 intelligitur —; aut cùm per signum 8 intelligitur —, tum per signum 8 intelligitur +.

partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per $z + c$, orietur $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \propto 2aay$, &, quæ eidem æquantur, inter se quoque sint æqualia, erit $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$. Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, habebiturque

$$\begin{array}{llll} +czz & \propto & +ccz & +cdd \\ -b & & -2bc & +ccd \\ & & +bb & -bdd \\ & & & -2bcd \\ & & & +bbd \end{array}$$

Vbi tandem si utrobique dividatur per $c - b$, orietur

$$\begin{array}{llll} zz & \propto & cz & +dd \\ & & -b & +cd \\ & & & -bd \end{array}$$

Hoc est, si collocentur quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0. \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

Quare postquam percurrimus omnia propositionis data, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis reducta sit ad æquationem

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0 \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

: superest ut ipsa contineat quæsitum propositionis, modò sit verum atque ex datis deduci possit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi possit per $z - c - d + b \propto 0$. Quare cum reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \propto 0$, sequitur quæsitum propositionis esse verum, hoc est, $z + b$ æquari $c + d$, sive HI & MN simul sumptas æquales esse ipsis BC & ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Vnde liquet, si Circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc est, rectas CB, DE sibi invicem æquales faciat, tunc HI, MN simul sumptas ipsius CB vel DE duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, erit æquatio

tio talis: $zz \begin{smallmatrix} -cz \\ +b \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -2cc \\ +bc \end{smallmatrix} \infty\, 0$, quæ dividi poteſt per $z - 2c + b \infty 0$, & oritur $z + c \infty 0$. Id quod arguit, z valere $2c - b$, ſive $z + b$ eſſe $\infty\, 2c$, hoc eſt, H I & M N ſimul ſumptas æquales eſſe ipſi C B ſeu D E bis ſumptæ.

Quare conſtat Theorematis veritas.

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus &c.] Quò ea, quæ de exprimendis radicibus Æquationum Cubicarum Autor hîc breviter perſtrinxit, cuivis manifeſtiora fiant: viſum fuit poſt ſequentis loci illuſtrationem afferre huc Appendicem, quam de Cubicarum Æquationum reſolutione anno 1646 ſimul cum Organica Conicarum Sectionum deſcriptione in lucem emiſimus, & nunc emendato hîc illic ſenſu cum additione quorundam ſubjungimus. Y

Hanc autem curvam in 6 diverſis punctis ſecare poteſt, ita ut hîc ſex diverſæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus ſecat, hoc indicio eſt, quaſdam ex hiſce radicibus inter ſe æquales eſſe, aut ipſarum aliquas eſſe tantùm imaginarias.] Z Quoniam hîc nonnulli ſcrupulum ſibi ipſis injiciunt, concipiendi, qui fieri poſſit, ut circulus aliquis hanc curvam in 6 diverſis punctis ſecet: haud abs re fore credidi, ſi hoc loco exemplum, quod ſibi jam pridem ingenioſiſſimus Huddenius, ad difficultatem hujus rei è medio tollendam, ſubjecit, adducerem.

Quocirca ſumendo ad hoc æquationem $y^6 - 21y^5 + 169y^4 - 675y^3 + 1414yy - 1464y + 576 \infty 0$, cujus radices, ut, 1, 2, 3, 3, 4, & 8, ſunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3, ad calculi prolixitatem evitandam, inter ſe æquales: oportet, ad curvæ hujus deſcriptionem, aſſumere A B $\infty \frac{1}{2}p \infty 10\frac{1}{2}$,

$p \infty 21$
$q \infty 169$
$r \infty 675$
$s \infty 1414$
$t \infty 1464$
$v \infty 576$

B K $\infty \sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$ ſeu $n \infty \sqrt{\frac{479}{4}}$, & E D vel T V $\infty \frac{2\sqrt{v}}{pn} \infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$. Deinde, ut inveniatur circulus P C N, oportet, acceptâ B L æquali E D $\infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$, aſſumere L H $\infty \frac{t}{2n\sqrt{v}} \infty \sqrt{\frac{3721}{479}}$; & ex puncto H erectâ perpendiculari H I $\infty \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$ Vide figuras Pag. 98 & 100.

(id quod brevitatis causâ vocetur $\frac{m}{nn}$) $\infty \frac{2727}{479}$, in circulo cujus diame-

diameter I L inscribere L P $\infty \sqrt{\frac{s + p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{7672}{479}}$: eritque I P radius quæsiti circuli $\infty \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$.

Iam ut constet, circulum hunc ex I intervallo invento I P descriptum secare vel tangere curvam A C N in tot diversis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc est, hîc in 5 diversis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non secet sed tangat: considerandum est, lineam I M esse $\infty \frac{m}{nn} - y$ vel $y - \frac{m}{nn}$, adeoque quadratum ex I M semper esse $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, & lineam G H vel C M semper

$\infty \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$. Ac proinde, si, tribuendo radici y unumquemque ex supra dictis valoribus, ex lineis hisce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam I C, eamque singulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento I P $\infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$: certum est, quòd circulus P C N eandem curvam A C N, quemadmodum indicatum fuit, sit secturus vel tacturus.

Hinc,
si ponatur $y \infty 1$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{5053504}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{490496}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 2$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{3129361}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{2414639}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 3$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{1664100}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{3879900}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 4$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{657721}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{4886279}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 8$, erit $\begin{cases} \square\ \text{I M.}\ \frac{1221025}{229441} \\ \square\ \text{C M.}\ \frac{4322975}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ I C. $\frac{5544000}{229441}$.

Ex quibus igitur apparet, quòd, assumptâ qualibet ex radicibus, linea I C semper ipsi I P inveniatur æqualis, hoc est, quòd circulus, qui ex I intervallo I P describitur, curvam A C N in 5 diversis punctis secet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio proposita diversos admittit radicis valores. Quod erat ostendendum.

Eodem modo liquet, si æquatio proposita 6 radices inæquales habuerit, quòd tunc quoque circulus P C N curvam A C N in 6 diversis punctis secet.

A P-

Schooten

APPENDIX, DE CVBICARVM ÆQVATIONVM RESOLVTIONE.



Æ QVATIONES Cubicæ omnes, & Quadrato-quadratæ, * quæ quidem & ad Cubicas reducuntur, quarum radix duarum est dimensionum, semper ad aliquam trium sequentium formularum reduci possunt.

*Vide quæ habentur pag. 92. à lin. 11 usque ad finem ejusdem paginæ.

$$z^3 \infty * - pz + q.$$
$$z^3 \infty * + pz + q.$$
$$z^3 \infty * + pz - q.$$

In priori autem formulâ, ubi z^3 æquatur $-pz+q$, regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit, nos docet radicem esse $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Quemadmodum etiam si habeatur $z^3 \infty +pz+q$, in qua quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, similis regula ostendit radicem fore $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Vnde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles, semper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur, exprimi posse.

Deinde verò si habeatur $z^3 \infty +pz+q$, ubi $\frac{1}{4}qq$ sit minus quàm $\frac{1}{27}p^3$, ibi prædicta regula non habet locum, nec ejusdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari potest, sicut inferiùs ostendemus. Quæ quidem resolim multæ fuit caliginis, & ut scribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodiit: *hoc est, in quo Autores hactenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maximè difficili.*

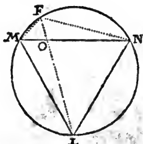
Hinc, quæ hùc spectant subobscura, aut neglectâ demonstratione

 tione

tione apud prædictos Autores invenimus, ea illustrare nobis visum fuit: præmittentes ad hoc sequentia Theoremata demonstrata.

THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum M N L circulo inscriptum, atque ex L educta utcunque recta L F usque ad circumferentiam in F, quæ secet M N in O, junctæque rectæ M F, F N: Dico F L æqualem esse ipsis M F, F N simul sumptis.



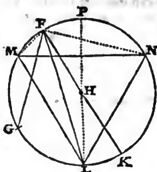
Triangula enim L N O & L N F similia sunt, cum habeant angulum ad L communem, & angulum L N O, hoc est, L M N ipsi L F N [1] æqualem, unde & tertius L O N tertio L N F [2] æqualis est. Quocirca [3] erit ut N O ad L N, ita F N ad L F. Eodem modo cum similia sint triangula L M O & L F M, erit ut M O ad L M seu L N, ita F M ad L F. Igitur [4] erit, ut N O, M O simul ad L N, ita F N, F M simul ad L F. Æquales autem sunt N O, M O simul sumptæ ipsi L N, æquales ergo quoque erunt F N, F M simul sumptæ ipsi L F. Quod erat ostendendum.

[1] *per 21 prop. tertii Elem.*
[2] *per 32 primi Elem.*
[3] *per 4tam sexti Elem.*
[4] *per 24 quinti Elem.*

THEOREMA II.

Iisdem positis, ductâ diametro F H K, sumatur arcus G L K triplus arcûs L K, jungaturque G F: Dico similiter arcum G M F arcus M F, nec non arcum G N F arcûs N F triplum esse.

Ducatur enim diameter L H P. Hæc namque secabit arcum M F N bifariam in P. Quoniam autem propter triangulum æquilaterum M N L circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-



æquales, ac ipsa tripla est arcus M P N, erit & semicircumferentia F M K tripla arcus M P. Quocirca cum eadem ratio sit arcus F M K ad arcum M P, totius ad totum, quæ arcus G L K ad arcum L K seu F P, ablati ad ablatum, erit quoque reliqui arcus G M F ad reliquum arcum M F eadem ratio, quæ totius ad totum *. Triplus autem est arcus F M K arcus M P. Triplus ergo etiam est arcus G M F arcus M F. Quod erat demonstrandum.

* per 19 quinti Elem.

Eodem modo ostenditur arcum G N F arcus N F triplum esse.

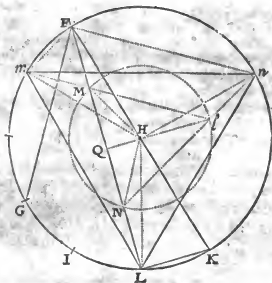
THEOREMA III.

Iisdem positis, ducatur recta n N parallela F m, occurrens rectæ F L in N; itemque m M l parallela F n, secans quidem rectam F L in M, occurrens autem ductæ n N in l: Dico si ducantur H l, H N, & H M ipsas inter se æquales esse, unamquamque verò æqualem rectæ L K.

Quoniam enim anguli m F M & N F n singuli circumferentiæ tertiæ parti insistunt, & ob parallelas ductas angulus F M m angulo N F n æquatur, at angulus F N n angulo m F M: erunt triangula m F M & N F n, quemadmodum etiam triangulum N M l æquiangula, ac proinde æquilatera. Porrò cum F L æquetur ipsis m F, F n simul sumptis (ut supra ostensum fuit); atque ablata F M ipsi m F, erit reliqua M L ipsi F n æqualis: cumque F N æquetur ipsi m l, erunt quoque M L & m l, atque adeò omnes tres m l, n N, & M L inter se æquales. Vnde si ab his æqualibus rectis auferantur rectæ inter se æquales M l, N l, & M N, remanebunt similiter m M, n l, & N L inter se æquales. Præterea cum m n, n L, & L m tres rectæ sint inter se æquales, liquet triangula mnl, nL N, & LmM

 inter

inter se constare ex æqualibus lateribus, ipsaque ob hoc & angulos singulos singulis æquales habere, hoc est, æquales inter se erunt anguli *m n l*, *n* L N, & L *m* M. Quia autem & anguli *m n* H, *n* L H, & L *m* H inter se æquales sunt, patet, si hi ex prædictis æqualibus inter se angulis demantur, reliquos itidem angulos H *n l*, H L N, & H *m* M inter se æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum H *n*, H L, & H *m*, perspicuum est, triangula H *n l*, H N L,

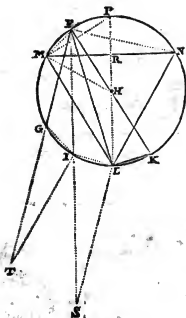


& H *m* M habere inter se duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac insuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & basin basi æqualem habebunt, atque adeò æquales inter se erunt rectæ H *l*, H N, & H M. Quòd autem præterea unaquæque ex ipsis æquetur rectæ L K, consequenter sic ostenditur. Producatur *l* H ut secet F L in Q. Hæc igitur ad rectos angulos cadet in F L, atque eam bifariam secabit in Q. Quia porrò, propter similitudinem triangulorum F L K & F Q H, F L est ad L K, ut F Q ad Q H; & permutando F L ad F Q, ut L K ad Q H, atque F L ipsius F Q est dupla: erit quoque L K ipsius

Q H

Q H dupla. Dupla autem etiam est H *l* ipsius Q H, siquidem æquilaterum est triangulum M *l* N: quare & H *l* nec non H M, H N ipsi L K æquales erunt. Quod erat ostendendum.

Ex his perspicua sunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello supra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12, in qua cubus trientis numeri radicum major est quadrato semissis numeri absoluti, sit exprimenda.



Vt autem pateat M N esse $\sqrt{}$ 13, ob 13 ① in æquatione, sciendum est ductis rectis H M, M P triangulum H M P esse æquilaterum, ac proinde quadratum M R triplum esse quadrati H R. Quocirca cum eadem sit ratio duplæ M R, hoc est, ipsius M N ad duplam H R, hoc est, H P, quàm simplæ M R ad simplam H R: erit quoque quadratum M N quadrati H P triplum. Vnde si statuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicum 13, hoc est, ∞ $\sqrt{}$ $4\frac{1}{3}$, liquet M N tunc fore $\sqrt{}$ 13. Sicut proponebatur.

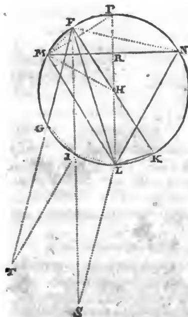
Lubet autem propositum ipsius ulteriùs inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejusmodi quæstionem proponimus.

Circulo existente F G K, *cujus diameter* F K, *in eoque inscriptâ* F G, *trifariam secetur arcus* G K, *à diametro & inscriptâ interceptus, in punctis* I & L, *& recta conne-*

ftatur F L; *datâ autem* F H *seu* H K ∞ *a*, & F G ∞ *b*, *oporteat invenire* F L ∞ *x*.

Iungantur K L, L I, & I G, ductâque F I producatur ad S, donec angulus F S L æquetur angulo I F L: eritque S L æqualis L F, & S I æqualis F L. Æqualis enim est S L ipsi L F[1], & S I ipsi F K, propter triangula I L S & K L F, quorum duo anguli L I S & S unius singuli sunt æquales duobus L K F & L F K alterius[2], ac præterea latus I L lateri L K[3]. Eodem modo, productâ F G donec angulus F T I æquetur angulo G F I; erit similiter T I æqualis I F, atque T G ipsi L F. Porrò cum similia sint triangula F H L, F L S, & F I T: erit ut H F ad F L, ita L F ad F S. Vnde cum H F sit ∞ *a*, & F L ∞ *x*, erit F S ∞ $\frac{xx}{a}$, è quâ si auferatur S I seu K F ∞ 2*a*, relinquetur I F ∞ $\frac{xx}{a} - 2a$. Eâdem ratione, cum sit ut H F ad F L, ita I F ad F T, erit F T ∞ $\frac{x^3}{aa} - 2x$, è quâ si tollatur T G seu F L ∞ *x*, remanebit G F ∞ $\frac{x^3}{aa} - 3x$. Restat igitur, ut $\frac{x^3}{aa} - 3x$ adæquetur ipsi G F datæ ∞ *b*. Quare æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax + aab$. Quæ æquatio secundæ formulæ est, in quâ quadratum semissis ultimi termini est minus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi: majus enim est a^6 quàm $\frac{1}{4}a^4bb$. Nam si utrobique dividamus per a^4, fit aa majus quàm $\frac{1}{4}bb$, cum, utrinque extrahendo radicem, *a* fiat majus quàm $\frac{1}{2}b$, seu 2*a* majus quàm *b*. Vt est manifestum, cum 2*a* dia-



[1] per 6 primi Elem.
[2] per 21 & 22 tertii Elem. nec non 13 primi Elem.
[3] per 29 tertii Elem.

$2a$ diametrum circuli referat, b autem in eodem inſcriptam G F, atque diameter omnium rectarum circulo inſcriptarum [1] ſit maxima. Vnde ſi a^6 æquetur $\frac{1}{4}a^4 bb$, tunc quoque inſcripta G F æqualis erit diametro F K: ita ut eo caſu duæ hæ lineæ coincidant, ac eadem fiat quæſtio ac ſi ſemicircumferentia F G K in tres æquales partes ſecanda foret. Quo quidem caſu radix quæſita F L ſit latus trianguli æquilateri, eodem circulo inſcripti. [1] *per 15 tertii Elem.*

E quibus plana fiunt illa, quæ ad explicationem radicis ſupradictæ æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12 Albertus Girardus in medium affert. Vbi inter $4\frac{1}{3}$ (tertiam partem ipſius 13) & unitatem, mediam proportionalem invenit $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, eamque ſemidiametrum circuli ſtatuit F H, quâ ut radio ipſum deſcribit, ac in eo deinde lineam F G adaptat æqualem $2\frac{10}{13}$, (quotienti videlicet diviſionis 12 per $4\frac{1}{3}$). In quo porrò trifariam ſecando arcum G K in punctis I & L, jungendoque F L, ait F L eſſe valorem radicis quæſitæ 1 ① æquationis propoſitæ. Dicens præterea alios duos valores ipſius ①, per — expreſſos, deſignari per rectas F M, F N, eosque duobus modis inveniri. Iuxta priorem quidem, ſi [2] centro H & intervallo L K arcus deſcribatur M N, ſecans F L in M & N; Iuxta poſteriorem verò, [3] deſcribendo in circulo à puncto L triangulum æquilaterum L M N, jungendoque F M & F N. Illas enim utroque modo eaſdem inveniri, ex ſupra demonſtratis manifeſtum eſt. [2] *ut in fig. pag. 348.* [3] *ut in fig. pag. 347.*

Vbi præterea notat in æquatione 1 ③ ∞ 13 ① — 12 oſtenſos valores prioris æquationis radici quæſitæ propoſitæ æquationis ſatisfacere, ſi tantùm eorum ſigna + & — immutaverimus, eaque denotaverimus per — F L, + F M, & + F N. Sed hoc ex ſequentibus perſpicuum fiet. Quemadmodum etiam illud, quod ſpectat ad æquationes ſecundæ formulæ, quas inquit neminem ad ſuum uſque tempus reſolvere ſciviſſe, quæ ſecundùm Analyſin ſpecioſam Vietæ ita denotantur:

$$A \text{ cubus æqualis } \left.\begin{matrix} +BB \\ +BC \\ +CC \end{matrix}\right\} \text{in } A \left.\begin{matrix} +B \\ +C \end{matrix}\right\} \text{in } BC.$$

Quòd eodem recidit ac ſi earundem conſtitutionem ſic agnoſceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta eſſe tria proportionalia plana B B, B C & C C, quorum aggregatum ſit B B + B C + C C, ſeu quantitas p; & quod fit ex medio plano

plano in aggregatum eorundem laterum fit $\overline{B+C}$ in BC, seu quantitas q. Quod quidem ultimum factum sic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus secundum; vel etiam ex summa duorum posteriorum planorum in latus primum: cum tria illa solida inter se æqualia sint, ut experienti constabit.

Vt autem penitiùs hæc introspiciamus, atque æquationum harum constitutionem agnoscamus, ponamus $x \infty d$ seu $x - d \infty 0$, & rursus $x \infty - b$ seu $x + b \infty 0$, ac denuo $x \infty - c$ seu $x + c \infty 0$, ducamusque $x - d \infty 0$ in $x + b \infty 0$, tum verò quod inde fit in $x + c \infty 0$, & prodibit æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 - dxx & - bdx & - bcd \infty 0, \text{vel } x^3 \infty & + dxx + bdx + bcd. \\ \quad + b & - cd & & - b \quad\; + cd \\ \quad + c & + bc & & - c \quad\; - bc \end{array}$$

In qua si ponatur d, verus valor radicis x, æqualis $b + c$, duobus falsis valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $+ d$ destruet $- b - c$, fietque $0\,xx$, hoc est, evanescet adfectio sub quadrato, nec ampliùs sese destruent. Nam cùm ex hypothesi d æquatur $b + c$, communi multiplicatore d, fiet quoque dd æquale $bd + cd$. At verò dd majus est quàm bc, quandoquidem idem valet quod $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio sub latere cum signo $+$. Ita ut, si $+ bd + cd - bc$ interpreteris per $+ p$, & $+ bcd$ per $+ q$, æquatio hanc recipiat formam: $x^3 \infty * + px + q$. Quam itaque constat tres admittere diversos radicis valores, unum quidem verum seu $+$ quàm 0, & alios duos falsos seu $-$ quàm 0, qui simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Porrò, ut hæc æquatio tres semper ejusmodi radicis valores recipiat, requiritur, ut in illâ $\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}$ non sit minus quàm q, seu quod idem est, ut $2 \sqrt{\frac{1}{3} p}$ non sit minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27} p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4} qq$. Quandoquidem, si p planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum vel duorum posteriorum in latus secundum vel primum, est illud, quod fit, cùm p planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejusdem æquationis de unico tantùm valore explicabilis est, utpote verò, cum æquatio tunc non producatur ex

ex ductu trium ejusmodi laterum in se invicem, nisi duo sumantur fictitia seu non existentia, quæ & impossibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem 1 C ∞ 6 N + 40, ubi 1 N valet + 4, cum 1 C 8 o Q — 6 N — 40 ∞ o dividatur per 1 N — 4 ∞ o, oriaturque æquatio impossibilis 1 Q + 4 N + 10 ∞ o, quæ nullas omnino admittit radices. Nisi velis illas, quarum sanè valor nullo modo comprehendi potest, utcunque tamen exprimere, ut scribendo 1 N ∞ — 2 + √ — 6, nec non 1 N ∞ — 2 — √ — 6. Ita ut verus valor ipsius 1 N realis existat & sit 4, & duo falsi fictitii sint — 2 + √ — 6, & — 2 — √ — 6. *Signum 8 significat + vel —.*

Quòd si verò proponatur æquatio 1 cc ∞ 6 x + 6, seu 1 cc 8 o ʒ — 6 x — 6 ∞ o, quæ per 1 x + vel — aliquo numero, ultimum terminum 6 dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus 1 x per ullum numerum absolutum vel fractum designari; sed verum valorem admittet, qui est irrationalis, quique juxta secundam Cardani regulam (hîc ante expositam) sic exprimitur: 1 x ∞ √ cc 4 + √ cc 2.

In quo porrò sensu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi est obnoxia. Nam si, verbi gratiâ, proponatur 1 C ∞ — 3 N + 14, poterit 1 C 8 o Q + 3 N — 14 ∞ o dividi per 1 N — 2, & orietur æquatio impossibilis 1 Q + 2 N + 7 ∞ o. Vnde liquet 1 N valere tantùm 2, nec ullos alios valores admittere; nisi eos sic velis exprimere — 1 + √ — 6, & — 1 — √ — 6.

Sin autem æquatio ejusdem formulæ sit 1 cc ∞ — 3 x + 10 seu 1 cc 8 o ʒ + 3 x — 10 ∞ o, quæ per 1 N — aliquo numero, ultimum terminum 10 dividente, dividi nequit, valor quoque verus radicis nullo numero absoluto vel fracto designari poterit. Quo igitur casu explicabitur secundùm priorem Cardani regulam, hoc modo: 1 x ∞ √ cc. √ 26 + 5 — √ cc. √ 26 — 5.

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus secundæ formulæ æquationis usum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod sequitur.

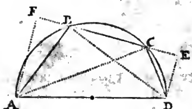
PROBLEMA.

***In semicirculo supra diametrum* A D *descripto quadrilatero* A B C D, *cognita sint tria ejus latera* AB, BC, & C D: *Oporteatque invenire diametrum seu quartum latus* A D.**

Esto A B ∞ a, B C ∞ b, C D ∞ c, diameter verò A D ∞ x; ducaturque recta B D, atque in B C productam perpendicularis demittatur D E.

[1] per 31 tertii Elem. [2] per 47 primi Elem. [3] per 12 secundi Elem.

Quia itaque [1] triangulum A B D est rectangulum, ideoque [2] quadratum A D æquale duobus quadratis A B, B D: si à quadrato A D ∞ xx subducatur quadratum A B ∞ aa, relinquetur quadratum B D ∞ $xx - aa$. Porrò quoniam obtusangulum est triangulum B D C, atque [3] quadratum B D majus quadratis B C, C D simul sumptis, duplo rectangulo B C E; si à quadrato B D ∞ $xx - aa$ subducamus aggregatum quadratorum B C, C D ∞ $bb + cc$, restabit duplum rectangulum B C E ∞ $xx - aa - bb - cc$. Denique cum similia sint triangula A B D & C E D, siquidem ipsa rectangula sunt, ac angulos præterea A & D C E [4] æquales habent: erit ut D A ad A B, ita D C ad C E.



[4] per 22 tertii & 13 primi Elem.

Vnde cum A D sit ∞ x, A B ∞ a, & D C ∞ c: erit C E ∞ $\frac{ac}{x}$. Quæ si ducatur in duplam B C ∞ $2b$, fiet duplum rectangulum B C E ∞ $\frac{2abc}{x}$. Æquandum propterea duplo rectangulo B C E ante invento ∞ $xx - aa - bb - cc$. Quare $\frac{2abc}{x}$ æquabitur $xx - aa - bb - cc$. Hoc est ordinatâ æqualitate, erit

$$x^3 \;\infty\; \begin{array}{l} +aa\,x + 2abc. \\ +bb \\ +cc \end{array}$$

Vnde cum hæc æquatio sit cubica secundæ formulæ, videndum deinceps an quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipsi æquale, an

eo

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quàm illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini est $\frac{aa+bb+cc}{3}$, ejus cubus

$$\frac{a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6}{27}.$$

Quadratum autem semissis ultimi termini est $aabbcc$. Oportet itaque horum utriusque relationem indagare. In quem finem productas quantitates $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ & $27aabbcc$ inter se confero, ut sequitur.

$3a^4bb.\ 3aabbcc.\ 3bbc^4.$ sunt tres proportionales in ratione aa ad cc, unde $3a^4bb+3bbc^4$ majus erit quàm $6aabbcc$, *per 25 quinti Elementorum.*

Sic $3aab^4.\ 3aabbcc.\ 3aac^4.$ sunt tres proportionales in ratione bb ad cc, unde $3aab^4+3aac^4$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Vt & $3a^4cc.\ 3aabbcc.\ 3b^4cc.$ sunt tres proportionales in ratione aa ad bb, unde $3a^4cc+3b^4cc$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Quare & omnes simul omnibus simul erunt majores, hoc est, erit $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus quàm $18aabbcc$.

Vnde & illius subtriplum $a^4bb+aab^4+a^4cc+bbc^4+aac^4+b^4cc$ majus quàm hujus subtriplum $6aabbcc$.

Rursus quoniam $a^6.\ a^4bb.\ aab^4.\ b^6.$ sunt proportionales continuè in ratione aa ad bb, erit a^6+b^6 majus quàm $a^4bb+aab^4$.

Sic etiam quia $b^6.\ b^4cc.\ bbc^4.\ c^6.$ sunt proportionales continuè in ratione bb ad cc, erit b^6+c^6 majus quàm $b^4cc+bbc^4$.

Similiter cum $a^6.\ a^4cc.\ aac^4.\ c^6.$ sint proportionales continuè in ratione aa ad cc, erit a^6+c^6 majus quàm $a^4cc+aac^4$.

Quare & simul omnes simul omnibus erunt majores, hoc est, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $a^4bb+aab^4+b^4cc+bbc^4+a^4cc+aac^4$. Quia autem hoc ipsum majus est quàm $6aabbcc$, ut supra ostendimus, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $6aabbcc$. Vnde & semissis $a^6+b^6+c^6$ majus quàm $3aabbcc$.

Quocirca cum $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus sit quàm $18aabbcc$.
ac ipsi addatur $a^6+b^6+c^6$ ——— ——— ——— quod majus est quàm $3aabbcc$.
& adhuc utrobique $6aabbcc$ ——— ——— ——— ——— ——— $6aabbcc$.

Fiet quoque $a^6+3a^4b+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ majus quàm $27aabbcc$.

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porrò est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data A B, B C, & C D inter se inæqualia statuantur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cùm verò duo quælibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Vt si b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 \begin{matrix} -aa \\ -2bb \end{matrix} x - 2abb \infty 0$, quæ dividi poterit per $x + a \infty 0$, quâ ratione ipsa reducetur ad quadratam: $xx - ax - 2bb \infty 0$, quæ ulteriùs dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam: $x^3 - 3aax - 2a^3 \infty 0$, eaque dividi poterit per $x - 2a \infty 0$, orietur namque æquatio: $xx + 2ax + aa \infty 0$, duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Vnde sequitur verum valorem radicis x eo casu fore $2a$, & duos falsos valores esse $-a$ & $-a$. Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera A B, B C, & C D æqualia inter se extiterint, figura A B C D fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porrò si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto A B seu $a \infty 24$, B C seu $b \infty 20$, C D seu $c \infty 15$, & quæratur A D ∞x. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniatur $\infty 1201$, & $2abc \infty 14400$, exurget ejusmodi æquatio: $x^3 \infty 1201x + 14400$, seu $x^3 \ast 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$. Quæ dividi potest per $x + 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \infty 0$, seu $xx \infty 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ seu diameter quæsita A D tres recipiat diversos valores, unum verum seu + quàm 0, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falsos seu − quàm 0, ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quòd si verò æquatio supra dicta $x^3 \ast 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam x + vel − aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm fal-

sam

ſam ullo numero exprimi potuiſſe, ſed eam hoc caſu denotandam eſſe per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra oſtendetur.

Vt ſi, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \propto 243\,x + 1215$, ſeu $x^3 * 0\,xx - 243\,x - 1215 \propto 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falſa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoſcitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hîc cubus trientis numeri radicum major ſit quàm quadratum ſemiſſis numeri abſoluti. Adeò ut radix ejus per ſectionem anguli in tres æquales partes ſit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum deſcribendo circulum cujus radius FH ſeu HK ſit 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam porrò ſecando arcum GK ſeu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipſius radicis x exprimere. Vbi præterea, ſi centro H intervallo rectæ LK arcum deſcripſerimus ſecantem ipſam FL in M & N [1], vel quod idem eſt à puncto L triangulum æquilaterum circulo inſcripſerimus LMN [2], rectæ FM & FN utramque falſam quantitatem radicis x deſignabunt.

[1] ut in fig. pag. 349.

[2] ut in fig. pag. 350.

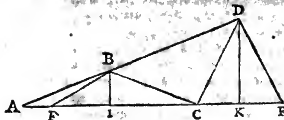
Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exſequi. Videlicet, ſi, [3] intervallo rectæ FH vel HK $\propto 9$ ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ deſcribatur circulus, in quo, inſcriptâ rectâ FG $\propto 15$ ſeu $\frac{3q}{p}$, arcus FMG & FNG trifariam porrò ſecentur, per rectas FM & FN, quas inquit ſimul ſumptas radici quæſitæ eſſe æquales.

[3] ut in fig. pag. 350.

Sin autem ejuſdem æquationis radicem juxta modum Vietæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, triplus ſit anguli, qui eſt ad baſin primi, & intelligere baſin quidem ſecundi eſſe $7\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò eſſe 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, x autem, de qua quæritur, eſſe baſin primi.

Quod ut cuivis obvium ſit, ſupponamus triangula illa eſſe ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit $\propto a$, & baſis ſecundi CE $\propto b$: Oporteatque invenire baſin primi AC $\propto x$.

 Quia



Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus B I, D K, in triangulo rectangulo A B I, quadratum ex A I $\infty\ \frac{1}{4}xx$ subductum à quadrato ex A B $\infty\ aa$; relinquit quadratum ex B I [1]: erit quadratum ex B I $\infty\ aa - \frac{1}{4}xx$.

[1] per 47 primi Elem.

Eodem modo, in triangulo rectangulo C D K, quadrato ex C K $\infty\ \frac{1}{4}bb$ subducto à quadrato ex C D $\infty\ aa$, relinquetur $aa - \frac{1}{4}bb$, pro quadrato ex D K.

Porrò quoniam, propter similitudinem triangulorum A B I & A D K [2], A I est ad I B, sicut A K ad K D: erit quoque ut $\frac{1}{4}xx$, quad. ex A I, ad $aa - \frac{1}{4}xx$, quad. ex I B; sic $xx + bx + \frac{1}{4}bb$, quad. ex A K, ad $aa - \frac{1}{4}bb$, quad. ex K D. Vnde multiplicando extrema, invenietur productum $\frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{16}bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4}aabb - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}bx^3 - \frac{1}{16}bbxx$, producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \infty 0$. Quæ summa si porrò per $x + b \infty 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \infty 0$, seu $x^3 \infty * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cujusque æquationis vera radix illic per rectam F L, hîc autem per rectam A C designatur.

[2] per 4 Sexti Elem.

Cæterùm quod angulus secundi trianguli D C E, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & B C A [3], propter æqualia crura A B, B C; & ob id [4] externus C B D alterutrius hujus duplus. Est autem hic C B D æqualis ipsi C D B [5], propter æqualitatem linearum C B, C D. Quare & C D B, id est, C D A ipsius A duplus est. Atqui [6] binis hisce A & C D A æqualis est externus D C E.

[3] per 5 primi Elem.
[4] per 32 primi Elem.
[5] per 5 primi Elem.
[6] per 32 primi Elem.

D C E. Hinc, qualium partium angulus A est 1, talium angulus C D A erit 2, & D C E 3, hoc est, triplus erit angulus D C E anguli A. Quemadmodum fuit propositum.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propositæ $x^3 \propto 243\,x + 1215$ sic interpretari: dicentes eam esse diametrum semicirculi, supra quam descripto quadrilatero inæqualium laterum, tria superiora in se invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{2}q$; at verò summa quadratorum ex ipsis faciat 243 seu p.

Vbi præterea notandùm, æquationem numericam 1 ③ $\propto$ 13 ① + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1 ① valeat + 4, — 3, & — 1; ac ipsa æquatio 1 ③ ℞ o ② — 13 ① — 12 $\propto$ o per 1 ① — 4 $\propto$ o, & per 1 ① + 3 $\propto$ o, atque etiam per 1 ① + 1 $\propto$ o dividi queat. Ita ut tantùm radices earum æquationum secundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi posse.

Sed jam tempus est ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur * $+ pz - q$.

Hæc autem æquatio tres diversos radicis valores admittit, duos nempe veros & unum falsum, æqualem veris illis simul sumptis, sicut ex ejusdem æquationis constitutione agnoscere licet. Nam si ponamus $x \propto b$ seu $x - b \propto o$, & $x \propto c$ seu $x - c \propto o$, atque etiam $x \propto -d$ seu $x + d \propto o$, & multiplicemus $x - b \propto o$ per $x - c \propto o$, ac denuo quod inde fit per $x + d \propto o$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 + d\,xx & - b\,dx & + bcd \propto o, \text{ vel } x^3 \propto & - d\,xx + bdx - bcd. \\ \quad\; - b & - cd & & \quad\; + b \qquad + cd \\ \quad\; - c & + bc & & \quad\; + c \qquad - bc \end{array}$$

In qua si ponatur d, valor falsus radicis x, æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $b + c$ destruet $- d$, fietque o xx, hoc est, evanescet adfectio sub xx, nec ampliùs sese destruent. Nam cùm ex hypothesi $b + c$ æquatur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque $bd + cd$ æquale dd. At verò dd majus est quàm bc, quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2\,bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio sub x cum signo —.

Ita

Ita ut, si $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $+q$, æquatio hanc induat formam: $x^3 \infty * + px - q$. Quam constat tres admittere differentes valores radicis x, duos quidem veros seu $+$ quàm o, unum autem falsum seu $-$ quàm o, æqualem veris illis simul sumptis.

Porrò ut hæc æquatio recipiat semper tres ejusmodi radicis valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q, seu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem supra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non nisi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falsum, qui juxta Cardani regulam sic exprimeretur: $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Vt in exemplum afferre licet æquationem: 1 cc ∞ 6 ℞ — 40, in qua 1 ℞ valet — 4, cum 1 cc 8 0 ℨ — 6 ℞ + 40 ∞ 0 dividi queat per 1 ℞ + 4 ∞ 0, oriaturque æquatio impossibilis 1 ℨ — 4 ℞ + 10 ∞ 0, seu 1 ℨ ∞ 4 ℞ — 10, cujus valores radicis nullo modo comprehendi possunt, nisi eos sic exprimere velimus: 1 ℞ ∞ $2+\sqrt{-6}$, & 1 ℞ ∞ $2-\sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipsius 1 ℞ sint tantùm fictitii $2+\sqrt{-6}$ & $2-\sqrt{-6}$, & falsus realis sit ∞ -4.

E quibus patet tertiæ hujus atque secundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum suarum reciprocatio.

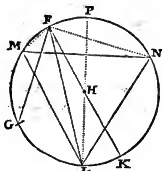
Lubet autem in usum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut sequentia manifestiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato F M G N, *in eoque inscriptâ* F G, *trifariam secetur arcus uterque* F M G & F N G *in* M & N: *Oporteatque invenire* F M *subtensam trientis unius*, & F N *subtensam trientis alterius*.

Esto F H seu H K ∞ a, F G ∞ b, & F M ∞ x, quæraturque ex H F & F M ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inscripta F G, perinde atque ipsa esset incognita: quæ ideo erit $3x - \frac{x^3}{aa}$. Iam verò cum ipsa detur ∞ b, erit $3x - \frac{x^3}{aa} \infty b$. Vnde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax - aab$.

Eodem



Eodem modò, si pro F N ponatur x, atque ex H F & F N quæramus F G, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam F M vel F N quæsitæ quantitati radicis x æqualem esse. Hinc cum 1 ③ æquetur 13 ① — 12, seu 1 ③ 8 o ② — 13 ① + 12 æquetur o, ac ipsa æquatio dividi possit per 1 ① — 1 ꝏ o, & per 1 ① — 3 ꝏ o, nec non per 1 ① + 4 ꝏ o: arguit id ipsum F M fore 1, at verò F N 3. Porrò quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æquè ac secundæ formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus — 4, seu quantitas lineæ F L. quæ ipsis M F & F N simul sumptis ostensa est æqualis.

Vnde perspicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Vbi docet, illas ad secundum casum secundæ formulæ revocandas esse, convertendo tantùm signum — numeri absoluti in signum +: cum in iis sicut hîc cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæsitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantùm illos ex o auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæsiti hujus, in qua duo semper veri sunt seu + quàm o, & tertius est falsus seu — quàm o, quemadmodum est ostensum.

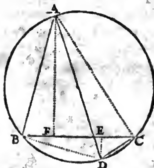
ALIVD PROBLEMA.

In circulo, cujus diameter A D, *inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis* A B, B C, *&* C D, *sibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis* A *&* D: *Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum* A D.

Ponatur ad hoc A B ꝏ a, B C ꝏ b, C D ꝏ c, & A D ꝏ x. jungan-

ganturque A C, B D, & in B C, productam, si opùs sit, perpendicularis demittatur D E.

Duplex autem hîc occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ A B & C D è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se mutuò intersecantes. In priori igitur positione si quadratum B D ∞ $xx - aa$ subducatur ex ag-

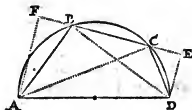


[1] per 13 secundi Elem. gregato quadratorum B C, C D ∞ $bb + cc$, relinquetur [1] duplum rectangulum B C E ∞ $bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula A B D & C E D similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & B A D, E C D æquales [2], utpote eidem peripheriæ B D insistentes: erit ut D A ∞ x ad A B ∞ a, ita D C ∞ c ad C E ∞ $\frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam B C ∞ $2b$ dat duplum rectangulum B C E ∞ $\frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo B C E, ante invento. Unde ordinatâ æquatione invenitur: $x^3 \infty \begin{matrix} + aax \\ + bb \\ + cc \end{matrix} - 2abc$, æquatio cubica tertiæ formulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constat ex præmisso Problemate paginæ 354.

[2] per 21 tertii Elem.

In secunda autem positione, si à quadrato D C ∞ cc auferantur quadrata D B, B C ∞ $xx - aa + bb$, relinquetur [3] duplum rectangulum C B E ∞ $cc - xx + aa - bb$. Cæterùm, quoniam rursus

[3] per 12 secundi Elem.



rursus propter similitudinem triangulorum A B D & C E D, A D ∞ x est ad A B ∞ a, sicut D C ∞ c ad C E: erit C E ∞ $\frac{ac}{x}$. E quâ subductâ C B ∞ b, remanebit B E ∞ $\frac{ac}{x} - b$. Hæc autem si multiplicetur per duplam C B, proveniet duplum rectangulum C B E ∞ $\frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo C B E ante invento ∞ $cc - xx + aa - bb$. Unde addito utrinque bb, ordinatâque secundùm artem æquatione, obtinebitur eadem atque superior: $x^3 \infty + aax - 2abc$.
$+bb$
$+cc$

Quocirca cum utroque casu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat A D, sequitur quoque eam differentem sortiri quantitatem, & ex eisdem datis inscriptis pro diversa earum positione dupliciter inveniri.

Ubi præterea notandum est, Problema propositum esse solidum, si tres inscriptæ A B, B C, & C D inæquales inter se fuerint: siquidem ad cubicam æquationem adscendit, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inscriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exsurget æquatio talis: $x^3 - aax + 2abb \infty 0$, quæ di-
$-2bb$
vidi poterit per $x - a \infty 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \infty 0$, quæ ulteriùs non est reducibilis.

Si autem juxta alterutram positionem omnes hæ tres inscriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \infty 0$, poterit hæc ipsa dividi per $x + 2a \infty 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \infty 0$, quæ porrò dividi poterit per $x - a \infty 0$, & orietur $x - a \infty 0$. Quoniam verò hoc casu inscriptæ cum diametro coïncidere intelliguntur ac ipsi diametro esse æquales, constat æquationis radicem x, hoc est, diametrum A D duos in eo

 admit-

admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cæterùm si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto A B ∞ a ∞ 24, B C ∞ b ∞ 20, C D ∞ c ∞ 15, & quæratur A D ∞ x. Hinc cum $aa + bb + cc$ sit 1201, & 2 abc ∞ 14400, invenietur æquatio talis: x^3 ∞ 1201 x — 14400, seu x^3 ♉ o xx — 1201 x + 14400 ∞ o. Quæ dividi potest per x — 25 ∞ o, oritur namque æquatio xx + 25 x — 576 ∞ o, seu xx ∞ — 25 x + 576. Cujus porrò vera radix est $\sqrt{732\frac{1}{4}}$ — $12\frac{1}{2}$, & falsa — $\sqrt{732\frac{1}{4}}$ — $12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæsita A D, hoc est, x radix prædictæ æquationis x^3 ∞ 1201 x — 14400, tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu + quàm o, nimirum + 25 majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{4}}$ — $12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falsum seu — quàm o, nimirum — $\sqrt{732\frac{1}{4}}$ — $12\frac{1}{2}$, qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis x^3 ∞ 1201 x + 14400 radices inventæ sint — 25, $12\frac{1}{2}$ — $\sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2}$ + $\sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantùm ex o esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio x^3 ♉ o xx — 1201 x + 14400 ∞ o dividi non potuisset per quantitatem incognitam x + vel — aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Vt si in exemplum proponatur æquatio x^3 ∞ 2700 x — 32400, seu x^3 ♉ o xx — 2700 x + 32400 ∞ o, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radicis x, sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato semissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hîc major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum cujus radius

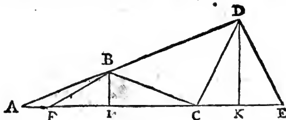
FH

FH seu HK sit 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam FG ∞ 36 seu $\frac{3q}{p}$, atque deinde trifariam secando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inscriptam 36 in duos inæquales arcus dispescitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem sortitur; sitque alterutra è subtensis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falsus autem ejusdem valor æqualis est veris illis simul sumptis, atque per rectam FL designatur.

Quos binos radicis valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut sequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, sit triplus anguli, qui est ad basin primi, & basis secundi intelligatur esse 18 seu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, esse basin dimidiam primi, multatam continuatamve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perspicuum fiat, fingantur triangula illa esse ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit ∞ a, & basis secundi CE sit ∞ b. Demissis autem in iis perpendicularibus BI, DK, sumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita positis, ut inveniatur AF, liquet, si pro ea ponamus y, & pro AC, ut ante, ponamus x, quadratum ex BI fore ∞ $aa - \frac{1}{4}xx$, adeoque quadratum ex FI ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI ∞ $\frac{1}{2}x$ sublatâ AF ∞ y, relinquitur FI ∞ $\frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum est $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy$ ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$.

 Hoc

Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty yx + 3aa$. Vnde
$- yy$
extractâ radice, fit $x \infty \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, si in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui est $\frac{9}{2}aay - y^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. obtinebimus æquationem $y^3 \infty * + 3aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea A F.

Eodem modo ad inveniendam F C, si pro ea ponamus z, atque ab ipsa tollamus I C $\infty \frac{1}{2}x$, remanebit F I $\infty z - \frac{1}{2}x$. Vnde cum quadratum ejus sit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \infty 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur
$xx \infty zx + 3aa$. Et fit, extractâ radice $x \infty \frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$.
$- zz$

Hinc si rursus in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x subrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{9}{2}aaz - z^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \infty * + 3aaz - aab$. Cujus ideo vera radix est linea F C.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit $x^3 \infty * + 3aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor A F obtinetur, si ex A I vel I C dimidia base primi trianguli A B C auferatur recta F I, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis B I; & major, si ad A I vel I C ipsa F I addatur. Omnino ut fuit propositum.

Vbi porrò advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \infty * + 3aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac secundæ formulæ reciprocationem, tertia radix sit falsa, quæ per A C, basin primi trianguli A B C, designatur, quæque ipsis veris A F, F C simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit $x^3 \infty * + 3aax + aab$, quòd præter veram, quæ per A C exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est A F, & major F C, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ A C sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis $x^3 \infty 2700x - 32400$ valores radicis x sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli A D designari, in quo si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales A B, B C, & C D, sibi

Vide figuras pag 362. & 363.

sibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, solidum ex ipsis tribus sit ∞ 16200 seu $\frac{1}{2}q$, & summa quadratorum earundem sit ∞ 2700 seu p. Nam quemadmodum hæ tres inscriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque positione diameter duplicem quantitatem sortitur, ita quoque ipsa in hac vel illa positione veram semper radicem designat. Falsa autem, ipsis veris adæquans, exhibetur per diametrum semicirculi, in quo descripto supra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inscriptis sumpta sint æqualia. Vt ex superioribus manifestum est.

Vbi advertendum insuper restat, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① — 12, à Girardo propositam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipsa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① + 12 ∞ 0 per 1 ① + 4 ∞ 0, & per 1 ① — 1 ∞ 0, nec non per 1 ① — 3 ∞ 0 dividi possit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regula explicari posse.

Vnde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquè facilè, immo quidem faciliùs concipi, cùm ipse per subtensas arcuum designatur, quorum triplum est datum, quàm cùm per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non nisi contentum cognoscitur. Præterquam quòd ad illas subtensas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm √ C. ad exprimenda latera cubica, & √ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac distinctè explicari possint.

Cæterùm ne quid hîc desideretur, sed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutissimus noster Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit.

Proponatur æquatio $z^3 \infty * - pz + q$, & sit z quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc $z \infty x - y$. Eritque $z^3 \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Vnde cum & z^3 æquetur $-pz + q$: erit similiter $-pz + q \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

Divi-

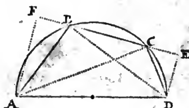
PROBLEMA.

In semicirculo supra diametrum A D *descripto quadrilatero* A B C D, *cognita sint tria ejus latera* AB, BC, & C D: *Oporteatque invenire diametrum seu quartum latus* A D.

Esto A B $\propto a$, B C $\propto b$, C D $\propto c$, diameter verò A D $\propto x$; ducaturque recta B D, atque in B C productam perpendicularis demittatur D E.

[1] per 31 tertii Elem. [2] per 47 primi Elem. [3] per 12 secundi Elem.

Quia itaque [1] triangulum A B D est rectangulum, ideoque [2] quadratum A D æquale duobus quadratis A B, B D: si à quadrato A D $\propto xx$ subducatur quadratum A B $\propto aa$, relinquetur quadratum B D $\propto xx - aa$. Porrò quoniam obtusangulum est triangulum B D C, atque [3] quadratum B D majus quadratis B C, C D simul sumptis, duplo rectangulo B C E; si à quadrato B D $\propto xx - aa$ subducamus aggregatum quadratorum B C, C D $\propto bb + cc$, restabit duplum rectangulum B C E $\propto xx - aa - bb - cc$. Denique cum similia sint triangula A B D & C E D, siquidem ipsa rectangula sunt, ac angulos præterea A & D C E [4] æquales habent: erit ut D A ad A B, ita D C ad C E.



[4] per 22 tertii & 13 primi Elem.

Vnde cum A D sit $\propto x$, A B $\propto a$, & D C $\propto c$: erit C E $\propto \frac{ac}{x}$. Quæ si ducatur in duplam B C $\propto 2b$, fiet duplum rectangulum B C E $\propto \frac{2abc}{x}$. Æquandum propterea duplo rectangulo B C E ante invento $\propto xx - aa - bb - cc$. Quare $\frac{2abc}{x}$ æquabitur $xx - aa - bb - cc$. Hoc est ordinatâ æqualitate, erit

$$x^3 \propto \begin{array}{l} + aax + 2abc. \\ + bb \\ + cc \end{array}$$

Vnde cum hæc æquatio sit cubica secundæ formulæ, videndum deinceps an quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipsi æquale, an

eo

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quàm illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini est $\frac{aa+bb+cc}{3}$, ejus cubus

$$\frac{a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6}{27}.$$

Quadratum autem semissis ultimi termini est $aabbcc$. Oportet itaque horum utriusque relationem indagare. In quem finem productas quantitates $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ & $27aabbcc$ inter se confero, ut sequitur.

$3a^4bb.\ 3aabbcc.\ 3bbc^4.$ sunt tres proportionales in ratione aa ad cc, unde $3a^4bb+3bbc^4$ majus erit quàm $6aabbcc$, *per 25 quinti Elementorum.*

Sic $3aab^4.\ 3aabbcc.\ 3aac^4.$ sunt tres proportionales in ratione bb ad cc, unde $3aab^4+3aac^4$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Vt & $3a^4cc.\ 3aabbcc.\ 3b^4cc.$ sunt tres proportionales in ratione aa ad bb, unde $3a^4cc+3b^4cc$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Quare & omnes simul omnibus simul erunt majores, hoc est, erit $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus quàm $18aabbcc$.

Vnde & illius subtriplum $a^4bb+aab^4+a^4cc+bbc^4+aac^4+b^4cc$ majus quàm hujus subtriplum $6aabbcc$.

Rursus quoniam $a^6.\ a^4bb.\ aab^4.\ b^6.$ sunt proportionales continuè in ratione aa ad bb, erit a^6+b^6 majus quàm $a^4bb+aab^4$.

Sic etiam quia $b^6.\ b^4cc.\ bbc^4.\ c^6.$ sunt proportionales continuè in ratione bb ad cc, erit b^6+c^6 majus quàm $b^4cc+bbc^4$.

Similiter cum $a^6.\ a^4cc.\ aac^4.\ c^6.$ sint proportionales continuè in ratione aa ad cc, erit a^6+c^6 majus quàm $a^4cc+aac^4$.

Quare & simul omnes simul omnibus erunt majores, hoc est, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $a^4bb+aab^4+b^4cc+bbc^4+a^4cc+aac^4$. Quia autem hoc ipsum majus est quàm $6aabbcc$, ut supra ostendimus, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $6aabbcc$. Vnde & semissis $a^6+b^6+c^6$ majus quàm $3aabbcc$.

Quocirca cum $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus sit quàm $18aabbcc$.
ac ipsi addatur $a^6+b^6+c^6$ —— —— —— quod majus est quàm $3aabbcc$.
& adhuc utrobique $6aabbcc$ —— —— —— —— —— $6aabbcc$.

Fiet quoque $a^6+3a^4b+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ majus quàm $27aabbcc$.

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porrò est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data A B, B C, & C D inter se inæqualia statuantur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cùm verò duo quælibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Vt si b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 \begin{matrix} -aa \\ -2bb \end{matrix} x - 2abb \infty 0$, quæ dividi poterit per $x + a \infty 0$, quâ ratione ipsa reducetur ad quadratam: $xx - ax - 2bb \infty 0$, quæ ulteriùs dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam: $x^3 - 3aax - 2a^3 \infty 0$, eaque dividi poterit per $x - 2a \infty 0$, orietur namque æquatio: $xx + 2ax + aa \infty 0$, duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Vnde sequitur verum valorem radicis x eo casu fore $2a$, & duos falsos valores esse $-a$ & $-a$. Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera A B, B C, & C D æqualia inter se extiterint, figura A B C D fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porrò si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto A B seu $a \infty 24$, B C seu $b \infty 20$, C D seu $c \infty 15$, & quæratur A D ∞x. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniatur $\infty 1201$, & $2abc \infty 14400$, exurget ejusmodi æquatio: $x^3 \infty 1201x + 14400$, seu $x^3 \ast 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$. Quæ dividi potest per $x + 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \infty 0$, seu $xx \infty 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ seu diameter quæsita A D tres recipiat diversos valores, unum verum seu $+$ quàm o, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falsos seu $-$ quàm o, ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quòd si verò æquatio supra dicta $x^3 \ast 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm falsam

ſam ullo numero exprimi potuiſſe, ſed eam hoc caſu denotandam eſſe per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra oſtendetur.

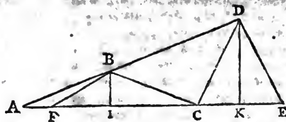
Vt ſi, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \propto 243x + 1215$, ſeu $x^3 * 0xx - 243x - 1215 \propto 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falſa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoſcitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hîc cubus trientis numeri radicum major ſit quàm quadratum ſemiſſis numeri abſoluti. Adeò ut radix ejus per ſectionem anguli in tres æquales partes ſit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum deſcribendo circulum cujus radius FH ſeu HK ſit 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam porrò ſecando arcum GK ſeu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipſius radicis x exprimere. Vbi præterea, ſi centro H intervallo rectæ LK arcum deſcripſerimus ſecantem ipſam FL in M & N [1], vel quod idem eſt à puncto L triangulum æquilaterum circulo inſcripſerimus LMN [2], rectæ FM & FN utramque falſam quantitatem radicis x deſignabunt.

Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exſequi. Videlicet, ſi, [3] intervallo rectæ FH vel HK $\propto 9$ ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ deſcribatur circulus, in quo, inſcriptâ rectâ FG $\propto 15$ ſeu $\frac{3q}{p}$, arcus FMG & FNG trifariam porrò ſecentur, per rectas FM & FN, quas inquit ſimul ſumptas radici quæſitæ eſſe æquales.

[1] ut in fig. pag. 349.
[2] ut in fig. pag. 350.
[3] ut in fig. pag. 350.

Sin autem ejuſdem æquationis radicem juxta modum Vietæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, triplus ſit anguli, qui eſt ad baſin primi, & intelligere baſin quidem ſecundi eſſe $7\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò eſſe 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem, de qua quæritur, eſſe baſin primi.

Quod ut cuivis obvium ſit, ſupponamus triangula illa eſſe ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit $\propto a$, & baſis ſecundi CE $\propto b$: Oporteatque invenire baſin primi AC $\propto x$.



Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus B I, D K, in triangulo rectangulo A B I, quadratum ex A I $\infty \frac{1}{4}xx$ subductum
[1] per 47 primi Elem. à quadrato ex A B $\infty\ aa$, relinquit quadratum ex B I [1]: erit quadratum ex B I $\infty\ aa - \frac{1}{4}xx$.

Eodem modo, in triangulo rectangulo C D K, quadrato ex C K $\infty \frac{1}{4}bb$ subducto à quadrato ex C D $\infty\ aa$, relinquetur $aa - \frac{1}{4}bb$, pro quadrato ex D K.

Porrò quoniam, propter similitudinem triangulorum A B I &
[2] per 4 Sexti Elem. A D K [2], A I est ad I B, sicut A K ad K D: erit quoque ut $\frac{1}{4}xx$, quad. ex A I, ad $aa - \frac{1}{4}xx$, quad. ex I B; sic $xx + bx + \frac{1}{4}bb$, quad. ex A K, ad $aa - \frac{1}{4}bb$, quad. ex K D. Vnde multiplicando extrema, invenietur productum $\frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{16}bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4}aabb - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}bx^3 - \frac{1}{16}bbxx$, producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \infty 0$. Quæ summa si porrò per $x + b \infty 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \infty 0$, seu $x^3 \infty * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cujusque æquationis vera radix illic per rectam F L, hîc autem per rectam A C designatur.

[3] per 5 primi Elem. [4] per 32 primi Elem. [5] per 5 primi Elem. [6] per 32 primi Elem.

Cæterùm quòd angulus secundi trianguli D C E, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & B C A [3], propter æqualia crura A B, B C; & ob id [4] externus C B D alterutrius hujus duplus. Est autem hic C B D æqualis ipsi C D B [5], propter æqualitatem linearum C B, C D. Quare & C D B, id est, C D A ipsius A duplus est. Atqui [6] binis hisce A & C D A æqualis est externus D C E.

D C E. Hinc, qualium partium angulus A est 1, talium angulus C D A erit 2, & D C E 3, hoc est, triplus erit angulus D C E anguli A. Quemadmodum fuit propositum.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propositæ $x^3 \infty 243\, x + 1215$ sic interpretari: dicentes eam esse diametrum semicirculi, supra quam descripto quadrilatero inæqualium laterum, tria superiora in se invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{2}q$; at verò summa quadratorum ex ipsis faciat 243 seu p.

Vbi præterea notandùm, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1 ① valeat + 4, — 3, & — 1; ac ipsa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① — 12 ∞ 0 per 1 ① — 4 ∞ 0, & per 1 ① + 3 ∞ 0, atque etiam per 1 ① + 1 ∞ 0 dividi queat. Ita ut tantùm radices earum æquationum secundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi posse.

Sed jam tempus est ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur * $+pz-q$.

Hæc autem æquatio tres diversos radicis valores admittit, duos nempe veros & unum falsum, æqualem veris illis simul sumptis, sicut ex ejusdem æquationis constitutione agnoscere licet. Nam si ponamus $x \infty b$ seu $x - b \infty 0$, & $x \infty c$ seu $x - c \infty 0$, atque etiam $x \infty -d$ seu $x + d \infty 0$, & multiplicemus $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$, ac denuo quod inde fit per $x + d \infty 0$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 + d\,xx & - bdx & + bcd \infty 0, \text{ vel } x^3 \infty - d\,xx & + bdx - bcd. \\ \quad - b & - cd & \qquad\qquad\qquad\quad + b & + cd \\ \quad - c & + bc & \qquad\qquad\qquad\quad + c & - bc \end{array}$$

In qua si ponatur d, valor falsus radicis x, æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $b + c$ destruet $-d$, fietque $0\,xx$, hoc est, evanescet adfectio sub xx, nec ampliùs sese destruent. Nam cùm ex hypothesi $b + c$ æquatur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque $bd + cd$ æquale dd. At verò dd majus est quàm bc, quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio sub x cum signo —.

Ita

Ita ut, ſi $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $+q$, æquatio hanc induat formam: $x^3 \infty * + px - q$. Quam conſtat tres admittere differentes valores radicis x, duos quidem veros ſeu $+$ quàm o, unum autem falſum ſeu $-$ quàm o, æqualem veris illis ſimul ſumptis.

Porrò ut hæc æquatio recipiat ſemper tres ejuſmodi radicis valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non ſit minus quàm q, ſeu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3q}{p}$, ſive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem ſupra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non niſi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falſum, qui juxta Cardani regulam ſic exprimeretur: $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Vt in exemplum afferre licet æquationem: 1 œ ∞ 6 ℞ — 40, in qua 1 ℞ valet — 4, cum 1 œ 8 0 ʒ — 6 ℞ + 40 ∞ 0 dividi queat per 1 ℞ + 4 ∞ 0, oriaturque æquatio impoſſibilis 1 ʒ — 4 ℞ + 10 ∞ 0, ſeu 1 ʒ ∞ 4 ℞ — 10, cujus valores radicis nullo modo comprehendi poſſunt, niſi eos ſic exprimere velimus: 1 ℞ ∞ $2+\sqrt{-6}$, & 1 ℞ ∞ $2-\sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipſius 1 ℞ ſint tantùm fictitii $2+\sqrt{-6}$ & $2-\sqrt{-6}$, & falſus realis ſit ∞ — 4.

E quibus patet tertiæ hujus atque ſecundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum ſuarum reciprocatio.

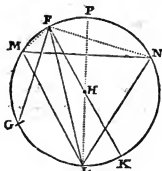
Lubet autem in uſum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut ſequentia manifeſtiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato F M G N, *in eoque inſcriptâ* F G, *trifariam ſecetur arcus uterque* F M G & F N G *in* M & N: *Oporteatque invenire* F M *ſubtenſam trientis unius*, & F N *ſubtenſam trientis alterius.*

Eſto F H ſeu H K ∞ a, F G ∞ b, & F M ∞ x, quæraturque ex H F & F M ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inſcripta F G, perinde atque ipſa eſſet incognita: quæ ideo erit $3x-\frac{x^3}{aa}$. Iam verò cum ipſa detur ∞ b, erit $3x-\frac{x^3}{aa} \infty b$. Vnde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax-aab$.

Eodem



Eodem modò, si pro F N ponatur x, atque ex H F & F N quæramus F G, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam F M vel F N quæsitæ quantitati radicis x æqualem esse. Hinc cum 1 ③ æquetur 13 ① — 12, seu 1 ③ ∗ o ② — 13 ① + 12 æquetur o, ac ipsa æquatio dividi possit per 1 ① — 1 ∞ o, & per 1 ① — 3 ∞ o, nec non per 1 ① + 4 ∞ o: arguit id ipsum F M fore 1, at verò F N 3. Porrò quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æquè ac secundæ formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus — 4, seu quantitas lineæ F L. quæ ipsis M F & F N simul sumptis ostensa est æqualis.

Vnde perspicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Vbi docet, illas ad secundum casum secundæ formulæ revocandas esse, convertendo tantùm signum — numeri absoluti in signum +: cum in iis sicut hîc cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæsitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantùm illos ex o auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæsiti hujus, in qua duo semper veri sunt seu + quàm o, & tertius est falsus seu — quàm o, quemadmodum est ostensum.

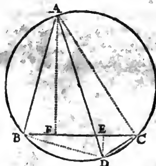
ALIVD PROBLEMA.

In circulo, cujus diameter A D, *inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis* A B, B C, & C D, *sibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis* A & D: *Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum* A D.

Ponatur ad hoc A B ∞ a, B C ∞ b, C D ∞ c, & A D ∞ x. jungan-

ganturque A C, B D, & in B C, productam, si opùs sit, perpendicularis demittatur D E.

Duplex autem hîc occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ A B & C D è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se mutuò intersecantes. In priori igitur positione si quadratum B D ∞ $xx - aa$ subducatur ex ag-



[1] per 13 secundi Elem.

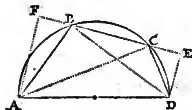
[2] per 21 tertii Elem.

gregato quadratorum B C, C D ∞ $bb + cc$, relinquetur [1] duplum rectangulum B C E ∞ $bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula A B D & C E D similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & B A D, E C D æquales [2], utpote eidem peripheriæ B D insistentes: erit ut D A ∞ x ad A B ∞ a, ita D C ∞ c ad C E ∞ $\frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam B C ∞ $2b$ dat duplum rectangulum B C E ∞ $\frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo B C E, ante invento. Vnde ordinatâ æquatione invenitur: $x^3 \infty \begin{matrix} +aax \\ +bb \\ +cc \end{matrix} - 2abc$, æquatio cubica tertiæ formulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constat ex præmisso Problemate paginæ 354.

[3] per 12 secundi Elem.

In secunda autem positione, si à quadrato D C ∞ cc auferantur quadrata D B, B C ∞ $xx - aa + bb$, relinquetur [3] duplum rectangulum C B E ∞ $cc - xx + aa - bb$. Cæterùm, quoniam

rursus



rursus propter similitudinem triangulorum A B D & C E D, A D ∞ x est ad A B ∞ a, sicut D C ∞ c ad C E: erit C E ∞ $\frac{ac}{x}$. E quâ subductâ C B ∞ b, remanebit B E ∞ $\frac{ac}{x} - b$. Hæc autem si multiplicetur per duplam C B, proveniet duplum rectangulum C B E ∞ $\frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo C B E ante invento ∞ $cc - xx + aa - bb$. Vnde addito utrinque bb, ordinatâque secundùm artem æquatione, obtinebitur eadem atque superior: $x^3 \infty \begin{array}{l} + aax - 2abc. \\ + bb \\ + cc \end{array}$

Quocirca cum utroque casu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat A D, sequitur quoque eam differentem sortiri quantitatem, & ex eisdem datis inscriptis pro diversa earum positione dupliciter inveniri.

Vbi præterea notandum est, Problema propositum esse solidum, si tres inscriptæ A B, B C, & C D inæquales inter se fuerint: siquidem ad cubicam æquationem adscendit, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inscriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exsurget æquatio talis: $x^3 \begin{array}{l} - aax \\ - 2bb \end{array} + 2abb \infty 0$, quæ dividi poterit per $x - a \infty 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \infty 0$, quæ ulteriùs non est reducibilis.

Si autem juxta alterutram positionem omnes hæ tres inscriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \infty 0$, poterit hæc ipsa dividi per $x + 2a \infty 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \infty 0$, quæ porrò dividi poterit per $x - a \infty 0$, & orietur $x - a \infty 0$. Quoniam verò hoc casu inscriptæ cum diametro coïncidere intelliguntur ac ipsi diametro esse æquales, constat æquationis radicem x, hoc est, diametrum A D duos in eo

admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cæterùm si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto A B $\infty\, a \,\infty\, 24$, B C $\infty\, b \,\infty\, 20$, C D $\infty\, c \,\infty\, 15$, & quæratur A D $\infty\, x$. Hinc cum $aa + bb + cc$ sit 1201, & $2\,abc \,\infty$ 14400, invenietur æquatio talis: $x^3 \,\infty\, 1201\, x - 14400$, seu $x^3 * 0\, xx - 1201\, x + 14400 \,\infty\, 0$. Quæ dividi potest per $x - 25 \,\infty\, 0$, oritur namque æquatio $xx + 25\, x - 576 \,\infty\, 0$, seu $xx \,\infty\, -25\, x + 576$. Cujus porrò vera radix est $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, & falsa $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæsita A D, hoc est, x radix prædictæ æquationis $x^3 \,\infty\, 1201\, x - 14400$, tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu + quàm 0, nimirum + 25 majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falsum seu — quàm 0, nimirum $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis $x^3 \,\infty\, 1201\, x + 14400$ radices inventæ sint -25, $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantùm ex 0 esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio $x^3 * 0\, xx - 1201\, x + 14400 \,\infty\, 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam x + vel — aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Vt si in exemplum proponatur æquatio $x^3 \,\infty\, 2700\, x - 32400$, seu $x^3 * 0\, xx - 2700\, x + 32400 \,\infty\, 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radicis x, sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato semissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hîc major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum cujus radius

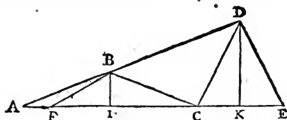
FH

FH seu HK sit 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam FG ∞ 36 seu $\frac{3q}{p}$, atque deinde trifariam secando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inscriptam 36 in duos inæquales arcus dispescitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem sortitur; fitque alterutra è subtensis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falsus autem ejusdem valor æqualis est veris illis simul sumptis, atque per rectam FL designatur.

Quos binos radicis valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut sequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, sit triplus anguli, qui est ad basin primi, & basis secundi intelligatur esse 18 seu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, esse basin dimidiam primi, multatam continuatamve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perspicuum fiat, fingantur triangula illa esse ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit ∞ a, & basis secundi CE sit ∞ b. Demissis autem in iis perpendicularibus BI, DK, sumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita positis, ut inveniatur AF, liquet, si pro ea ponamus y, & pro AC, ut ante, ponamus x, quadratum ex BI fore ∞ $aa - \frac{1}{4}xx$, adeoque quadratum ex FI ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI ∞ $\frac{1}{2}x$ sublatâ AF ∞ y, relinquitur FI ∞ $\frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum est $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy$ ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$.

Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty yx \begin{array}{l} + 3aa. \\ - yy \end{array}$ Unde extractâ radice, fit $x \infty \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, si in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui est $\frac{9}{2}aay - y^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. obtinebimus æquationem $y^3 \infty * + 3aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea A F.

Eodem modo ad inveniendam F C, si pro ea ponamus z, atque ab ipsa tollamus I C $\infty \frac{1}{2}x$, remanebit F I $\infty z - \frac{1}{2}x$. Unde cum quadratum ejus sit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \infty 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty zx \begin{array}{l} + 3aa. \\ - zz \end{array}$ Et fit, extractâ radice $x \infty \frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$.

Hinc si rursus in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + 3aax + aab$ in locum x subrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{9}{2}aaz - z^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \infty * + 3aaz - aab$. Cujus ideo vera radix est linea F C.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit $x^3 \infty * + 3aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor A F obtinetur, si ex A I vel I C dimidia base primi trianguli A B C auferatur recta F I, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis B I; & major, si ad A I vel I C ipsa F I addatur. Omnino ut fuit propositum.

Ubi porrò advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \infty * + 3aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac secundæ formulæ reciprocationem, tertia radix sit falsa, quæ per A C, basin primi trianguli A B C, designatur, quæque ipsis veris A F, F C simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit $x^3 \infty * + 3aax + aab$, quòd præter veram, quæ per A C exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est A F, & major F C, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ A C sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis $x^3 \infty 2700x - 32400$ valores radicis x sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli A D designari, in quo si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales A B, B C, & C D, sibi

Vide figuras pag 362. & 363.

ſibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, ſolidum ex ipſis tribus ſit ∞ 16200 ſeu $\frac{1}{2}q$, & ſumma quadratorum earundem ſit ∞ 2700 ſeu p. Nam quemadmodum hæ tres inſcriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque poſitione diameter duplicem quantitatem ſortitur, ita quoque ipſa in hac vel illa poſitione veram ſemper radicem deſignat. Falſa autem, ipſis veris adæquans, exhibetur per diametrum ſemicirculi, in quo deſcripto ſupra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inſcriptis ſumpta ſint æqualia. Vt ex ſuperioribus manifeſtum eſt.

Vbi advertendum inſuper reſtat, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① — 12, à Girardo propoſitam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipſa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① + 12 ∞ 0 per 1 ① + 4 ∞ 0, & per 1 ① — 1 ∞ 0, nec non per 1 ① — 3 ∞ 0 dividi poſſit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regula explicari poſſe.

Vnde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquè facilè, immo quidem faciliùs concipi, cùm ipſe per ſubtenſas arcuum deſignatur, quorum triplum eſt da um, quàm cùm per latera certorum cuborum exprimitur, quor m non niſi contentum cognoſcitur. Præterquam quòd ad illas ſubtenſas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm √ C. ad exprimenda latera cubica, & √ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac diſtinctè explicari poſſint.

Cæterùm ne quid hîc deſideretur, ſed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutiſſimus noſter Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit.

Proponatur æquatio z^3 ∞ * $-pz+q$, & ſit z quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc z ∞ $x-y$. Eritque z^3 ∞ $x^3-3xxy+3xyy-y^3$. Vnde cum & z^3 æquetur $-pz+q$: erit ſimiliter $-pz+q$ ∞ $x^3-3xxy+3xyy-y^3$.

Divi-

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe $-pz \infty - 3xxy + 3xyy$, & $q \infty x^3 - y^3$. Quarum prima divisa per $z \infty x - y$ dat $-p \infty -3xy$, seu $p \infty 3xy$; & fit $x \infty \frac{\frac{1}{3}p}{y}$. Vnde, si in secunda in locum x subrogetur valor inventus $\frac{\frac{1}{3}p}{y}$, & in locum x^3 hujus cubus $\frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3}$, obtinebitur $q \infty \frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3} - y^3$. Hoc est, multiplicando utrinque per y^3, & ordinando æquationem, habebitur $y^6 \infty -qy^3 + \frac{1}{27}p^3$. Cujus radix, juxta pag. 6, est $y^3 \infty -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $y \infty \sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Adeoque $x \infty \frac{\frac{1}{3}p}{y}$ $\infty \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$. Posueramus autem $z \infty x - y$. Erit itaque $z \infty \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Qui sanè valor eo Cardani simplicior censeri potest, siquidem ad hunc obtinendum radix cubica semel tantùm est extrahenda. Quòd si verò ipsius z valor cum Cardano sit exhibendus, ita porrò operari licebit. videlicet in æquatione jam dictâ $q \infty x^3 - y^3$ in locum y^3 substituendo valorem inventum $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$: habebiturque $q \infty x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, seu $x^3 \infty + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $x \infty \sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Hinc cum z sit $\infty x - y$: erit $z \infty \sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Haud dissimili modo procedendum in æquatione $z^3 \infty * + pz + q$, ubi z valet $\sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. ponendo nempe $z \infty x + y$.

Notandum verò, in his z æqualem supponi $x +$ vel $- y$, non autem pluribus incognitis quantitatibus, ex eo quòd plures duabus diversis æquationibus institui nequeunt; ut & $-pz$ supponi $\infty -3xxy + 3xyy$, ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere licet per $z \infty x - y$, atque sic deinde ipsarum x, y, & z valores in simplicissimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri potest, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Resolutione dicta sufficiant.

AD-

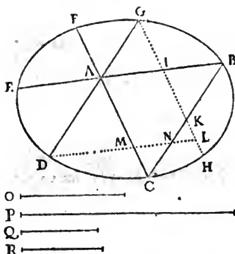
ADDITAMENTVM.

CÆterùm ut pateat, non facilè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ Iacobi à Waessenaer Anno 1640 sub titulo: *Den onwissen VVis-konstenaer. I.I. Stampioënius*, in lucem prodiit. Verùm enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

THEOREMA.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cùm Sol non occidit, defixis ad plumbum supra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita se habentibus, ut, postquam eodem die extremitas umbræ baculi A transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit extremitas umbræ baculi B transiisse per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonstrandum est eandem transiisse pariter per B.

Quod ut fiat, sciendum primò est umbram baculi A descripsisse Ellipsin vel Circulum, transeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc observata ponantur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis C A, A B, B C, productisque B A, A C donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ D G ipsi B C parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens est, quòd, postquam umbra baculi B finiit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut B A ad A E, rationem, quæ est inter baculum B & baculum A, designet. Eodem modo, postquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut C A ad A F sit, sicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipsius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipsius A ad D; ita ut B C sit ad A D, sicut baculus B ad baculum A. Quibus sic intelle-



tellectis, ut constet, umbram baculi C transiisse item per B, ostendendum est, cùm umbra baculi A incidit in G, umbram ipsius C incidisse similiter in B, hoc est, baculum C ad baculum A, vel C A ad A F esse, sicut C B ad A G.

Quod ipsum igitur ut fiat manifestum, inveniendus nobis est valor lineæ A G. Quocirca ad hoc ductâ G H parallelâ A C, secante A B, B C in I & K, & Ellipsis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur A B ∞ a, B C ∞ b, C A ∞ c, A F ∞ d, A E ∞ e, H K ∞ x, & A G vel C K ∞ z: eritque K B ∞ $b - z$.

Deinde, ut innotescat A D, quoniam baculus B est ad baculum A, ut B A ad A E; itemque B baculus ad A baculum, ut B C ad A D: erit ut B A ad A E, vel a ad e, sic B C vel b ad A D. quæ ideo erit $\frac{be}{a}$. Cum autem hæc multiplicata per A G seu z producat $\frac{bez}{a}$ rectangulum D A G, similiterque A G vel C K seu z multiplicata per K B seu $b - z$ producat $bz - zz$ rectangulum C K B; & quidem, juxta 17 prop. 3[tii] libri Conicorum Apollonii, $\frac{bez}{a}$ ad $bz - zz$ sit, vel $\frac{be}{a}$ ad $b - z$, sicut □ F A C ad □ G K H seu

cd ad

cd ad cx, vel d ad x: fiet, multiplicando medios tum extremos, $db - dz \infty \frac{bex}{a}$, vel $adb - adz \infty bex$.

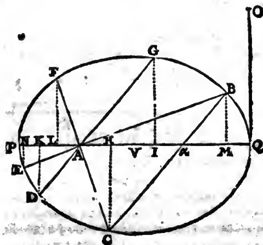
Iam, ut habeatur K I, fiat, propter similitudinem triangulorum B C A & B K I, ut B C ∞ b ad C A ∞ c, ita B K ∞ $b - z$ ad K I $\infty \frac{cb - cz}{b}$. quæ ad H K seu x addita dat H I $\infty \frac{cb - cz + bx}{b}$; at verò ex K G vel C A seu c subducta relinquit I G $\infty \frac{cz}{b}$. ex quarum ductu unius in alteram invenitur □ G I H $\infty \frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$.

Porrò, ut obtineatur A I, fiat, propter similitudinem triangulorum A G I & B C A, ut B C ∞ b ad B A ∞ a, ita A G ∞ z ad A I $\infty \frac{az}{b}$. quæ ad A E seu e addita dat E I $\infty \frac{az + eb}{b}$; at vero ex A B ∞ a subducta relinquit I B $\infty \frac{ab - az}{b}$. ex quarum mutua multiplicatione exurgit □ E I B $\infty \frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$. Iam cum, ut ante, per 17. 3[tii] Con. Apoll., □ F A C seu cd sit ad □ G I H seu $\frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$, sive ad $\frac{cbz - czz + bxz}{bb}$, sicut □ E A B seu ea ad □ E I B seu $\frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$, sive e ad $\frac{abz + bbe - azz - bez}{bb}$: fiet, multiplicando extremos tum medios, omisso priùs communi denominatore bb, $abdz + bbed - adzz - bedz \infty cbez - cezz + bexz$. Quoniam autem supra inventum fuit $adb - adz \infty bex$, hoc est, multiplicando utrinque per z, $abdz - adzz \infty bexz$: obtinebitur, subducendo unam æquationem ex altera, $bbed - bedz \infty cbez - cezz$, vel $bbd - bdz \infty cbz - czz$. Hoc est, æqualitate ritè ordinatâ, erit $zz \infty \frac{cb + db}{c}$ in $z - \frac{bbd}{c}$. Quæ æquatio juxta regulam pag. 7 resoluta dat $z \infty b$, ut & $z \infty \frac{db}{c}$. Cum verò horum duorum valorum ipsius z duntaxat $\frac{db}{c}$ quæsitæ A G respondeat, hicque nos doceat c esse ad d, sicut b ad z: patet, C A ad A F esse sicut C B ad A G. Quod erat ostendendum.

Sequitur Problema, ejusque solutio.

PROBLEMA.

Tempore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano Horizontali in punctis A, B, & C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum, & qui in C 8 pedum, existente lineâ A B 33 pedum: Contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A transire per puncta B & C, baculi autem B per puncta A & C, & baculi C per punctum A, unde fit ut etiam per punctum B sit transitura. Quæritur jam quo terræ loco atque anni die hæc evenerint?



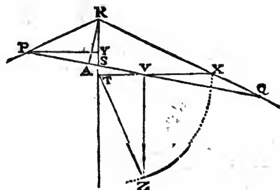
Solutio.

Vt hoc Problema solverem, primò consideravi, Solem, baculi cujusque umbrâ, eo die quo hæc observata sunt, descripsisse Ellipsin, Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde etiam facilè perspexi, umbram illam non Hyperbolam, nec Parabolam, sed Ellipsin descripsisse, eamque observationem, quæ prima recensetur, non matutino tempore, sed ante me-

mediam noctem factam fuisse. Quibus brevitatis causâ suppositis ad Problematis solutionem ita procedo.

Sit P G Q C Ellipsis, quam descripsit umbra baculi A, ejusque maxima diameter sit P Q, repræsentans lineam meridianam: liquet, cùm umbra baculi A pertigit ad Q, fuisse mediam noctem, & cùm à Q per C transiens pervenit ad P fuisse meridiem, & denique à P per G decurrens usque in Q rursus ad mediam noctem fuisse perventum. Deinde, cùm umbra baculi B incidit in A, tum quoque umbra baculi A incidit in E; ita ut A B sit ad A E, ut 3 ad 1. Porrò, cùm umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut C A ad A F sit, ut 4 ad 3. Denique, cùm umbra baculi B terminabatur in C, terminabatur quoque umbra baculi A in D; ita ut G A ad A D sit, ut 9 ad 4. Quibus A
rationibus in Ellipsi sic explicatis, demittantur perpendiculares B M, E N, C H, F L, G I, & D K.



Deinde, in secunda figura supponendo P R Q esse Conum, in quo P Q designet majorem prædictæ Ellipseos diametrum, A R baculum A, R S axem Coni, angulus A S R altitudinem Poli, & angulus R P Y distautiam inter æquatorem & locum Solis in Ecliptica: fiat in Ellipsi P Q $\propto q$, latus rectum Q O $\propto r$, A Q $\propto p$, M Q $\propto x$, H Q $\propto y$, & K Q $\propto z$: eritque A M $\propto p - x$, A N $\propto \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}x$, N Q $\propto \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x$, A H $\propto p - y$, A L $\propto \frac{3}{4}p - \frac{3}{4}y$, L Q $\propto \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}y$, & K A $\propto z - p$; In Cono verò, A R $\propto c$, seu 6, P Q $\propto q$, A V $\propto qu$, S V $\propto fuq$: eritque A S $\propto qu - fuq$, B
& P S $\propto \frac{1}{2}q - fuq$.

His positis, quæro primùm rationem, quam inter se habent MQ, HQ, & KQ, ut &, BM, HC, & DK: & invenio BM + HC æquari 3 DK: cum BC & AD parallelæ existentes inter
C se sint, sicut baculus B ad baculum A, hoc est, ut 3 ad 1: ac pro-
D inde BM + HC ∞ 3 DK. E quibus porrò invenitur PA ad AQ esse, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc est, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Deinde beneficio AM & AB quæro perpendicularem BM, quæ etiam in aliis terminis inveniri potest. unde innotescit latus rectum r, quod postea quoque aliter beneficio Coni invenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f, tum q, ac postea etiam u.

Cognitis autem f, q, & u, quæritur ratio AS ad AR, ostendens Poli elevationem.

Denique investigatur ratio, quæ est inter TX & TR, hoc est, inter PY & YR, & inde innotescit distantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur MQ sic investigatur: Vt PQ seu q ad QO seu r, ita quadratum MQ seu xx ad $\frac{rxx}{q}$, quod subductum ab rx, rectangulo MQO, relinquit $rx - \frac{rxx}{q}$, pro quadrato ex BM, adeoque $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ pro BM. Rursus, ut q ad r, ita quadratum NQ $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{9}px + \frac{1}{9}xx$ ad $\frac{\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{9}prx + \frac{1}{9}rxx}{q}$. quod si subtrahatur à $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$, rectangulo NQO, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx \frac{-16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$
E pro NE, ∞ $\sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$, tertiæ videlicet parti ipsius BM. Quæ æquatio si reducatur, invenietur x ∞ $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, pro MQ.

Deinde, ad inveniendam HQ, investigetur priùs eodem modo HC, $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$. Tum fiat, ut CA ad AF, seu 4 ad 3, ita $\sqrt{rx - \frac{ryy}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{9}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$, seu LF. Porrò, ut q ad r, ita quadratum LQ $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$ ad $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9ryy}{16q}$.

Quod

Quod si auferatur à $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$, rectangulo LQO, & ex reliquo extrahatur radix, fiet $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21pry}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$ pro LF ∞ $\sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$, ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat $y \infty \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, pro HQ.

Porrò, ad inveniendam KQ, investigetur ut priùs KD $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$. Deinde fiat ut AD ad AG, seu 4 ad 9, ita $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, seu GI. Rursus, ut 4 ad 9, ita AK $z - p$ ad $\frac{9z - 9p}{4}$, seu AI. quæ ex AQ sublata relinquit IQ $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$. Porrò ut q ad r, ita quadratum QI $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zz}{16}$ ad $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117rpz}{8q} + \frac{81rzz}{16q}$. Quod si auferatur à $\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4}$, rectangulo IQO, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117rpz}{8q} - \frac{81rzz}{16q}}$, pro

GI

$GI \infty \sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, ante inventæ. Quæ æquatio si reducatur, habebitur $z \infty \frac{13pp-4pq}{18p-9q}$.

Atque ita inventæ sunt

$$MQ \text{ seu } x \infty \frac{4pp-3pq}{2p-q}.$$

$$HQ \text{ seu } y \infty \frac{7pp-4pq}{6p-3q}.$$

$$KQ \text{ seu } z \infty \frac{13pp-4pq}{18p-9q}.$$

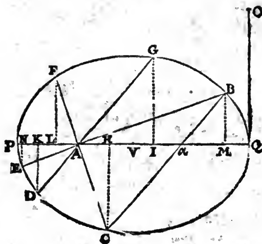
Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa est $BM \sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$, loco x substituatur $\frac{4pp-3pq}{2p-q}$, & $\frac{16p^4-24p^3q+9ppqq}{4pp-4pq+qq}$ loco xx, fietque BM

$$\sqrt{\frac{-16p^4r+32p^3qr-19ppqqr+3pq^3r}{4ppq-4pqq+q^3}}.$$

Eodem modo, quoniam HC inventa est $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$, loco y scribatur $\frac{7pp-4pq}{6p-3q}$, & $\frac{49p^4-56qp^3+16ppqq}{36pp-36pq+9qq}$ loco yy eritque $HC \sqrt{\frac{-49p^4r+98p^3qr-61ppqqr+12pq^3r}{36ppq-36pqq+9q^3}}$.

Similiter, quoniam DK inventa est $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$, loco z ponatur $\frac{13pp-4pq}{18p-9q}$, & $\frac{169p^4-104p^3q+16ppqq}{324pp-324pq+81qq}$ loco zz, fietque $DK \sqrt{\frac{-169pr+338p^3qr-205ppqqr+36pq^3r}{324ppq-324bqq+81q^3}}$.

Quibus inventis, facile est invenire rationem ipsius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut supra dictum est: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipsius HC, multiplicando tam numeratorem, quàm denominatorem ipsius BM per $\sqrt{9}$, & denominatorem ipsius DK dividendo per 3, fietque omisso communi denominatore, pro $BM \sqrt{-144p^4r+288p^3qr-171ppqqr+27pq^3r}$, pro



pro H C $\sqrt{-49p^4r+98p^3qr-61ppqqr+12pq^3r}$, & pro tripla D K $\sqrt{-169p^4r+338p^3qr-205ppqqr+36pq^3r}$. Qui singuli si per pr dividantur, fiet pro B M $\sqrt{-144p^3+288ppq-171pqq+27q^3}$, pro H C $\sqrt{-49p^3+98ppq-61pqq+12q^3}$, & pro tripla D K $\sqrt{-169p^3+338ppq-205pqq+36q^3}$; & hi rursus di- F
visi per $-p+q$, dant pro B M $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$, pro H C $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & pro tripla D K $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$. Vbi porrò, si supponatur G
$-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn-27qq}$ pro B M, $\sqrt{+49pn-12qq}$ pro H C, & $\sqrt{+169pn-36qq}$ pro tripla D K, adeoque $\sqrt{144pn-27qq}+\sqrt{49pn-12qq} \infty \sqrt{169pn-36qq}$. Quæ æquatio reducta dabit $ppnn \infty + \frac{335qq}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}$. Et fit $pn \infty \frac{1}{4}qq$, nec non $pn \infty \frac{143}{768}qq$.

Vbi sciendum, accipiendam esse tantùm radicem $pn \infty \frac{143}{768}qq$: cum reliqua radix $pn \infty \frac{1}{4}qq$, restituendo valorem ipsius n, producat hanc æquationem $pp \infty qp - \frac{1}{4}qq$, cujus radix est $p \infty \frac{1}{2}q$; ostendens baculum A in medio ipsius P Q fuisse constitutum.

Quod ſanè fieri non poteſt, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non ſunt æquales. Hinc, cum $p\,n$, hoc eſt, $\frac{143}{768}\,qq$, ſit $\infty - pp + pq$, ſeu $pp \infty qp - \frac{143}{768}\,qq$, cujus radix eſt $p \infty \frac{1}{2}q -$
H $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, nec non $p \infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$: fiet pro P A $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q +$
I $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro A Q. Vnde porro innoteſcit P A eſſe ad A Q, ſicut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Quo pacto cognoſcatur primam obſervationem matutino tempore non fuiſſe factam.

Iam ſi in Ellipſi primam obſervationem matutino tempore ponamus factam eſſe, & P Q, ut ante, lineam meridianam deſignare, atque baculi A umbram, motum Solis inſequentem, à P per F tranſiiſſe uſque ad Q (quo tempore Sol humillimus exiſtens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte ſumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo poſito, ſi per modum præcedentem quæratur æquatio, fiet $p\,p\,n\,n \infty \frac{67qq}{160}\,p\,n - \frac{143\,q^4}{3200}$: in qua numerus abſolutus major eſt quadrato ſemiſſis numeri radicum. Vnde, cum nulla ſit linea, quæ Æquationis hujus radix eſſe poſſit: liquet, primam obſervationem matutino tempore non contigiſſe, ſed ante mediam noctem. Sicut initio fuit ſuppoſitum.

Quâ ratione innoteſcat umbram non deſcripſiſſe Hyperbolam, aut Parabolam. Quomodo inveniatur latus rectum per Ellipſin.

Deinde, ſi ponatur, umbram baculi A deſcripſiſſe Hyperbolam, invenietur æquatio $p\,p\,n\,n \infty - \frac{335qq}{768}\,p\,n - \frac{143\,q^4}{3072}$. Quæ cum nullam admittat radicem, quæ propoſito convenire poſſit, indicio eſt, umbram non deſcripſiſſe Hyperbolam. Eodem modo oſtenditur ipſam non deſcripſiſſe Parabolam.

Poſtea ad inveniendum r, latus rectum Ellipſeos, quæratur A M, ut ſequitur. Quoniam ſubducendo M Q ex A Q, hoc eſt, $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$ ex p, relinquitur $\frac{-2pp + 2pq}{2p - q}$, pro A M: hinc ſi loco p ſubſtituatur $\frac{1}{2}\,q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ante inventum, & $\frac{1}{4}\,qq + \frac{7qq}{16\sqrt{3}} + \frac{49qq}{768}$ loco pp; fiet $\frac{143\,q}{112\sqrt{3}}$ pro A M. Porrò, poſito baculo A ∞ 6 ∞ c, erit A B ∞ 33 ∞ $\frac{11c}{2}$ (eſt enim ut 6 ad 33, ſeu 2 ad 11, ſic c ad $\frac{11c}{2}$). à cujus quadrato $\frac{121\,cc}{4}$ ſi auferatur

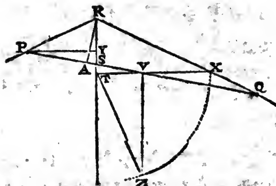
143,

$\frac{143,143,qq}{112,112,3}$, quadratum ex A M; relinquetur $\frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$, pro quadrato ex B M. Subductâ autem A M $\frac{143\,q}{112\sqrt{3}}$ ex A Q $\frac{1}{2}q + \frac{7\,q}{16\sqrt{3}}$, remanet $\frac{1}{2}q - \frac{47\,q}{56\sqrt{3}}$ pro M Q seu x. Iam cum quadratum ex B M, primò inventum, sit $rx - \frac{rxx}{q}$, subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ in locum x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47\,qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ in locum xx; K habebitur $\frac{143\,qr}{56,56,3}$, pro quadrato ex B M. Ac proinde, cum paulò ante pro quadrato ex B M inventum quoque sit $\frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$: erit $\frac{143\,qr}{56,56,3} \propto \frac{121\,cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$. Quæ æquatio si reducatur, proveniet $r \propto \frac{11,14,56,3\,cc}{13\,q} - \frac{143\,q}{4}$.

Quomodo latus rectum inveniatur per Comm.

Præterea, ad investigandum latus rectum r in aliis terminis addatur quadratum ex A S, $qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, ad quadratum ex A R, cc; & habebitur $cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, pro quadrato ex R S: adeoque $\sqrt{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}$, pro R S. quæ brevitatis caussâ nominetur n. Deinde, quoniam, propter similitudinem triangulorum A R S, T S V, & P Y S, R S seu n est ad A R seu c, sicut S V seu fvq ad T V, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad P Y; invenietur $\frac{fvqc}{n}$ pro T V, & $\frac{\frac{1}{2}qc - fvqc}{n}$, pro P Y, quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, pro T X. Rursus, quia, propter eandem triangulorum similitudinem, R S, seu n, est ad A S seu $qv - fvq$, sicut S V seu fvq ad S T, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad S Y; fiet pro S T $\frac{qqvvf - ffvvqq}{n}$, & $\frac{\frac{1}{2}qqv - fvvqq - \frac{1}{2}fvqq + ffvvqq}{n}$, pro S Y. quæ ab R S $\frac{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}{n}$ subducta, relinquit $\frac{cc + qqvv - fvvqq + \frac{1}{2}fvqq - \frac{1}{2}qqv}{n}$ pro R Y. Additis autem R S & S T, habebitur $\frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$ pro R T. L

Iam



Iam cum, ob quatuor lineas proportionales R T, R Y, T X, & P Y, R T multiplicata per P Y tantundem producat atque R Y per T X: proveniet $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq - ccfv - fqqv^3 + ffv^3qq \propto \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq + \frac{1}{4}fvqq - \frac{1}{4}qqv$, adeoque $cc \propto fvvqq - qqvv \frac{+\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$. Porrò subducto quadrato ex T V à quadrato ex T X vel T Z, relinquetur $\frac{\frac{1}{4}qqcc - ffvvqqcc}{nn}$ pro quadrato ex Z V, $\propto \frac{1}{4}qr$. Vnde r sic invenitur. Restituatur valor ipsius nn, & fit

$$\frac{\frac{1}{4}ccqq - ffvvqqcc}{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq} \propto \frac{1}{4}qr,$$

vel $ccq - ccr - 4ffvvqcc \propto qqvvr - 2fvvqqr + ffvvqqr$: itemque loco cc valor ejus jam modò inventus, & habebitur, qq utrobique exemptis, $fvvq - 4f^3v^4q - vvq + 4ffv^4q - \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + ffvvq - fvvq \frac{+\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}r}{f} \propto - fvvr + ffvvr$. Quibus demum per f multiplicatis, si quantitates in r ductæ ad unam partem transferantur, obtinebitur, utramque partem per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffvv + f^3vv$ dividendo, $r \propto q - 4fvvq$.

Quâ ratione, ex duplici terminorum genere ipsius r, inveniatur f.

Postquam igitur inventa est $r \propto \frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4}$, nec non $r \propto q - 4fvvq$, erit $\frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4} \propto q - 4fvvq$.

$4fvvq$. Ex qua æquatione quæro f, hoc modo: pro $\frac{11,14,56,3}{13}$ scribatur brevitatis causâ d, eritque $\frac{dcc}{q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$. Rursus pro $\frac{143}{4}$ scribatur b, & erit $\frac{dcc}{q} - bq \infty q - 4fvvq$, hoc est, subrogato $fvvqq - qqvv + \frac{\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$ in locum cc, habebitur $dfvvq - dvvq + \frac{\frac{1}{4}dq}{f} - \frac{1}{4}dq - bq \infty q - 4fvvq$. Vnde, dividendo utrinque per q, & multiplicando per f, invenietur, quantitatibus in ff ductis ad unam partem translatis, $dvvff + 4vvff \infty f + bf + \frac{1}{4}df + dvvf - \frac{1}{4}d$: adeoque si restituantur valores quantitatum d & b, atque in locum v substituatur $\frac{7}{16\sqrt{3}}$,

$\frac{317569}{2496} ff \infty \frac{137543}{208} f - \frac{6468}{13}$, vel $ff \infty \frac{33684}{6481} f - \frac{25344}{6481}$, M

cujus æquationis radix est $f \infty \frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$ seu N

$\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.

Deinde, ex iisdem terminis quæro q, ut sequitur. Resumptâ æquatione $\frac{25872cc}{13q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$, loco cc reponatur valor ejus datus 36, & ubique multiplicetur per q, fietque $\frac{25872,36}{13} - \frac{143qq}{4} \infty qq - 4fvvqq$, vel $\frac{25872,36}{13} \infty qq + \frac{143qq}{4} - 4fvvqq$, adeoque $qq \infty \frac{\frac{25872,36}{13}}{1 + \frac{143}{4} - 4fvv}$. Quoniam autem inventa est f & v, hinc in locum $-4fvv$ substituatur $\frac{-4,7,7,16842 + 4,7,7,390\sqrt{785}}{16,16,3,6481}$,

seu $\frac{-196,16842 + 76440\sqrt{785}}{768,6481}$,

Quâ ratione ex iisdem terminis ipsius r inveniatur q.

seu $\frac{-24,\ 137543 + 24,\ 3185\sqrt{785}}{24, 32, 6481}$, hoc eſt,

$\frac{-137543+3185\sqrt{785}}{32,\ 6481}$; eritque $qq \infty \frac{\frac{25872,\ 36}{13}}{\frac{7484113+3185\sqrt{785}}{32,\ 6481}}$;

$$\text{ſeu } qq \infty \frac{\frac{25872,\ 36}{13}}{\frac{\overline{49,\ 13} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}{32,\ 6481}}, \text{ hoc eſt,}$$

$\frac{25872, 36, 32, 6481}{\overline{13,13,49} \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, ſeu $\frac{528, 49, 36, 32, 6481}{\overline{169,49} \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$,

hoc eſt, $\frac{11, 48, 36, 32, 6481}{\overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$. Hinc poſito $cc \infty 1$, erit

$qq \infty \frac{11, 48, 32, 6481}{\overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$; at vero exiſtente

$cc \infty \overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}$, erit $qq \infty 11, 48, 32, 6481$, adeoque $q \infty \sqrt{\overline{11,48,32,6481}}$, & $qv \infty \frac{\sqrt{49,\ 11, 48, 32, 6481}}{16, 16, 3}$,

ſeu

seu $\sqrt{\frac{49,11,48,32,6481,}{16,48}}$, hoc est $\sqrt{\frac{49,11,32,6481}{16}}$, seu $\infty \sqrt{49,22,6481}$.

Iam, ut inveniatur ratio A S ad A R, quoniam $1 - f$ multiplicata per qv producit $qv - fvq$, atque f est $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$: ideo, si $1 - f \infty \frac{390\sqrt{785} - 10361}{6481}$ multiplicetur per $qv \infty \sqrt{49,22,6481}$, exsurget $qv - fvq \infty$ $\sqrt{\frac{49,22,6481 \text{ in } 390\sqrt{785} - 10361}{6481}}$, pro A S; seu A S ∞ $\frac{7\sqrt{22,6481} \text{ in } 13,30\sqrt{785} - 13,797}{\sqrt{6481,6481}}$, hoc est, $\frac{7,13,\sqrt{22} \text{ in } 30\sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}}$; & A R $\infty 13$ in $\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$. Inventio ratio A S ad A R.

Quibus per 13 divisis, erit A S $\infty \frac{7\sqrt{22} \text{ in } 30\sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}}$, & A R $\infty \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$, aut, si ponatur A S $\infty 7\sqrt{22}$, erit A R $\frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}}{30\sqrt{785} - 797}$: multiplicatoque hujus tum numeratore tum denominatore per denominatoris residuum, proveniet A R $\infty \frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30\sqrt{785}}{11,6481, \text{ vel } 11,\sqrt{6481},\sqrt{6481}}$, hoc est, A R $\infty \frac{\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30\sqrt{785}}{11\sqrt{6481}}$, seu $\sqrt{\frac{1595143 2541 + 568545725\sqrt{785}}{121,6481}}$, seu $\sqrt{20341 + 725\sqrt{705}}$. Ac proinde si A S $\infty 7\sqrt{22}$ sumatur pro radio, erit A R $\infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, tangens anguli A S R sive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.

Denique ad investigandam rationem T X ad T R, vel P Y ad Y R; cum T X supra inventa sit $\frac{\frac{1}{2}cq}{n}$, & T R $\infty \frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$: hinc

hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam supposità AR seu $c \infty 1$, qq est $\frac{11,48,32,6481}{169 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, vel, numeratore atque denominatore per $\overline{11749-5\sqrt{785}}$ multiplicato, $qq \infty \frac{\overline{11,48,32,6481} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,138019376}$, seu $\frac{\overline{48,2,176,6481} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,176,6481}$ hoc est, $\frac{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}$, & $q \infty \sqrt{\frac{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}}$, & vv est $\frac{49}{256,2}$, adeoque $qqvv \infty \frac{\overline{48,2,49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,256,3}$, seu $\frac{\overline{96,49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,96,8}$, hoc est, $\frac{\overline{49} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8}$) neglecto communi denominatore n, multiplicetur $\overline{1-f}$ per $qqvv$, & fit $\overline{qqvv-fvvqq} \infty \frac{390\sqrt{785}-10361}{6481} \text{ in } \frac{49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8}$, seu $\frac{-6517,11,6481+49,5,11,6481\sqrt{785}}{13,11,11,8,6481}$, hoc est, $\frac{-6517+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$.

Cui si addatur $cc \infty 1$, fiet $cc+qqvv-fvvqq \infty \frac{-5373+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$, pro TR. Eodem modo multiplicato $q \infty \frac{\sqrt{\overline{48,2} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}}{169,121}$, per $\frac{1}{2}c$, seu $\frac{1}{2}$ (quandoquidem c est 1): habebitur $\frac{1}{2}cq \infty \frac{\sqrt{\overline{24} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}}{169,121}$, pro TX. Inventæ igitur TX & TR si reducantur ad eandem denominationem, ac deinde denominator communis omittatur, obtinebitur TX $\infty \sqrt{\overline{04,24} \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}$, & TR $\infty \overline{49,5\sqrt{785}-5373}$, sive TX $\infty \sqrt{18046464-\sqrt{463011840000}}$, & TR $\infty \sqrt{47119625}-5373$.

P Quarum si TX vel PY sumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, distantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.

Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla occurrant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque minùs

minùs exercitatis ſcrupulum injicere poſſent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clariſſimus D. Eraſmius Bartholinus, Caſp. Fil. Medicinæ ac Mathematum in Academia Hafnienſi Profeſſor Regius concinnavit, paucis hîc adjicere.

Ita ut G A ad A D ſit, ut 9 ad 4.] Oſtenſum enim eſt A
Theoremate præcedenti C A eſſe ad A F, hoc eſt, baculum C ad baculum A, ſicut C B ad A G. Vnde cum baculus A ad baculum B ſit, ſicut D A ad C B: erit quoque ex æqualitate in proportione perturbata, ut C baculus ad B baculum, hoc eſt, ut 8 ad 18, ſeu 4 ad 9, ita D A ad A G; & convertendo G A ad A D, ut 9 ad 4.

$AV \propto qu$, $SV \propto fuq$.] Puta hîc unitatem ſubintelligi, B
quæ ſit a; ita ut a ſeu 1 ſit ad q, ſicut u ad qu; & rurſus a ſeu 1 ad qu, ſicut f ad fuq.

Ac proinde $B M + HC \propto 3 D K$.] Nam cum, propter C
ſimilitudinem triangulorum α B M & α C H, α B ſit ad B M, ſicut *Huc refer*
α C ad C H, & permutando α B ad α C, ſicut B M ad C H, com- *fig. p. 371.*
ponendoque B C ad α C, ſicut B M + C H ad C H: & propter ſimilia triangula C α H & D A K, α C ad C H, ſicut A D ad D K, permutandoque α C ad A D, ſicut C H ad D K; erit ex æquo, ut B C ad A D, ſic B M + C H ad D K. Vnde cum B C ipſius A D tripla ſit, erit quoque B M + H C ipſiũs D K tripla.

E quibus porrò invenitur P A ad A Q eſſe, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ D
ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quemadmodum poſtea perſpicuum fiet.

Tertiæ videlicet parti ipſius B M.] Nimirum, propter E
ſimilitudinem triangulorum A B M & A E N, ubi A B eſt ad B M, ſicut A E ad E N, & permutando A B ad A E, ſicut B M ad N E. Vnde cum A B ad A E (ut ſupra) ſit, ſicut 3 ad 1: erit quoque B M ipſius N E tripla.

Et hi rurſus diviſi per $-p+q$, &c.] Vbi notandum, ſi F
B M $\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pqq + 27q^3}$, H C $\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3}$, & tripla D K $\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pqq + 36q^3}$ dividantur per $-p+q$, oriri pro B M $\sqrt{+144pp - 144pq + 27qq}$, pro

HC $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$, & pro tripla DK $\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$; non autem $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}\ \sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$, ut habet Auctor, Ratio autem cur ita signa immutaverit, est, quòd signa negata prævaleant signis affirmatis. quod sic ostendi potest.

Etenim cum $2p$ — major sit quàm — q — — — $2p$ major quàm q
& utrinque multiplicetur per $72q$ — — — — $72q$ utraque in se $2p$ — — q
ducatur
erit quoque $144pq$ — major quàm — $72qq$, & fiet $4pp$ major quàm qq:
unde si auferatur* $144pp$ — major quàm — $36qq$ adeoque multiplicando u-
relinquetur $144pq - 144pp$ major quàm $36qq$: trinque per 36 — — 36
adeoque addendo utrinque $144pp$ — — — — — $144pp$ *erit $144pp$ major quàm $36qq$
erit quoque $144pq$ major quàm $144pp + 36qq$.

Ac proinde $144pq$ multò major quàm $144pp+27qq$. Et sic de reliquis. Vbi notandum, si loco divisoris superioris $-p+q$ sumatur divisor $+p-q$, eosdem terminos inveniri, iisdemque signis affectos, quemadmodum ab Auctore sunt propositi.

G *Vbi porrò si supponatur $-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn-27qq}$ pro BM.*] Etenim existente $-p+q \infty n$, si utrobique multiplicetur per $+144p$, fiet $-144pp+144pq \infty +144pn$: adeoque $-144pp+144pq-27qq \infty +144pn-27qq$, ac proinde $\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \infty \sqrt{+144pn-27qq}$. Et sic de reliquis.

H *Fiet pro PA $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro AQ.*]

Vide pag. 165 vel 284. Quoniam enim æquatio $pp \infty qp - \frac{143}{768}qq$, duas admittit veras radices, quarum summa est q, referens quantitatem cognitam secundi termini qp, atque designans lineam PQ: fit, ut si una $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumatur pro linea AQ, pro quâ supposita fuit p, altera $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumenda sit pro linea PA.

I *Vnde porrò innotescit PA esse ad AQ, sicut $\sqrt{3}-\frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3}+\frac{7}{8}$.*] Quod sic liquet,

AP

AP AQ

Multiplicetur $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$.
utrinque per 2, & fit $q - \frac{7q}{8\sqrt{3}}$ ad $q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}$.
tum rursus per $\sqrt{3}$, & fit $q\sqrt{3} - \frac{7q}{8}$ ad $q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}$.
Denique dividatur utrobique per q, fietque $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ *in locum* x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ *in locum* xx, *habebitur* $\frac{143qr}{56,56,3}$, *pro quadrato ex* BM.] Id quod hoc pacto fieri potest. K

Ex $rx \infty \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$

subtrahatur $\frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qr}{56,56,3}$:

& remanebit $rx - \frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47,47,qr}{56,56,3}$ vel $\frac{142qr}{56,56,3}$.

Nimirum si reducatur $\frac{1}{4}qr$ ad denominatorem ipsius $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$, utpote faciendo ut 4 ad 56, sic 1 ad 14, eritque $\frac{1}{4}qr \infty \frac{14qr}{56}$. & deinde multiplicando tam numeratorem quàm denominatorem hujus fractionis per 56, 3, fiet $\frac{56,3,14qr}{56,56,3}$, vel $\frac{2352qr}{56,56,3}$: à quo subducto $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$ seu $\frac{2209qr}{56,56,3}$, relinquetur $\frac{143qr}{56,56,3}$.

Quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, *pro* TX.] Est enim PY æqualis VX. Quod facilè demonstrari potest. Cum enim Sol quotidianâ suâ conversione circa mundi axem rectos Conos efficiat: fit, ut PY, si producta concipiatur, donec ipsi RQ occurrat, ab axe RT in puncto Y bifariam atque ad angulos rectos secetur, triangulumque efficiat, quod triangulo VXQ sit simile ac similiter positum. cujus latus PQ duplum existens lateris VQ trianguli VXQ (propter punctum V, quod centrum refert Ellipsis, cujus transversa diameter est PQ, & ZV semissis secundæ dia- L

 metri)

metri) facit ut etiam linea P Y producta ipsius V X dupla sit futura, adeoque P Y æqualis V X.

M *Atque in locum v substituatur* $\frac{7}{16\sqrt{3}}$.] Convincitur autem v esse $\frac{7}{16\sqrt{3}}$: est enim A Q supra inventa $\infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & P A $\infty \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Vnde cum P Q sit $\infty\, q$, & V punctum medium ipsius P Q, adeoque P V vel V Q $\infty \frac{1}{2}q$; erit A V $\infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Hinc cum A V supposita sit $\infty\, v\,q$, erit $vq \infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ac proinde $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$.

N *Cujus æquationis radix f est* $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$, *seu* $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.] Notandum hîc, æquationem $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$ aliam adhuc admittere radicem, nempe $f \infty \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$, juxta ea, quæ habentur pag. 7. Quam quidem radicem, cum major sit quàm $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$, cujus non nisi partem designare debet, Author meritò neglexit. Esse autem $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ majorem, patet, si reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo $\frac{16842,7 + 390,7\sqrt{785}}{6481,16,\sqrt{3}}$, & $\frac{6481,7}{6481,16\sqrt{3}}$.

O *Ac proinde si* $AS \infty 7\sqrt{22}$ *sumatur pro radio, erit* $AR \infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, *tangens anguli A S R sive elevationis Poli, videlicet* 80 *grad.* 45 *min. circiter.*] Est enim $7\sqrt{22}$ in rationalibus ∞ 32, 8′3″1‴, circiter, & $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \infty$ 201, 6′2″8‴, circiter. Vnde si fiat ut A S 32, 8′3″1‴ ad radium 100000, ita A R 201, 6′2″8‴ ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli A S R. proximè respondens tangenti grad. 80, & 45 min.

Qua-

Quarum si T X vel P T sumatur pro radio, erit T R vel Y R tangens anguli T X R vel Y P R, grad. 19, & 27 *min. circiter, distantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.*] Cum enim pro T X inventa sit $\sqrt{18046464 - \sqrt{46301184000}}$, quæ in rationalibus ferè est 4222, 7′ 1″ 1‴, & pro T R $\sqrt{47119625} - 5373$, quæ in rationalibus est 1491, 3′ 7″ 4‴ circiter: hinc, si fiat ut T X 4222, 7′ 1″ 1‴ ad radium 100000, ita T R 1491, 3′ 7″ 4‴ ad quartum 35318; erit 35318; tangens anguli T X R vel Y P R, congruens quàm proximè tangenti grad. 19. & 27 min.

Et tantum de solutione Problematis, quod in specimen hujus Methodi afferre visum fuit: quæ cum talis sit, ut ad Arithmeticæ quæstiones enodandas, non minùs quàm ad Geometriæ Problemata resolvenda atque construenda deserviat, non abs re fuerit, si Coronidis loco hîc subjiciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unà cum præcedenti solutione tunc temporis prodiit; præsertim cum illa à nemine (quod sciam) antea sit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam satisfactum, cujus demonstrationem, qualis à me inventa est, breviter sum subjuncturus.

Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.

PRÆPARATIO.

PRimo, si in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Vt, exempli gratiâ, ad extrahendam $\sqrt{}$ ⊙ ex $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$, multiplico binomium per 2, & fit $\sqrt{968} + 25$. Similiter si sit $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$, primùm multiplico binomium per

 $\sqrt{5}$,

$\surd\,5$, & fit $\surd\,242 + \frac{25}{2}$, deinde per 2, ut jam factum est, & sic de cæteris.

Deinde, si neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum est per multiplicationem aut divisionem ad aliud binomium, cujus altera pars sit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis semper fieri potest; sed breviùs plerumque per minoris numeri multiplicationem aut divisionem. Quemadmodum $\surd\,242 + \surd\,243$ multiplicari quidem potest per $\surd\,242$, & fit $242 + \surd\,58806$; sed compendiosiùs per $\surd\,2$, & provenit $22 + \surd\,486$. Eodem modo $\surd\,\textcircled{3}\,3993 + \surd\,\textcircled{6}\,17578125$ potest bis multiplicari per $\surd\,\textcircled{3}\,3993$, & producitur aliud binomium, cujus absolutus numerus est 3993; sed breviùs per $\surd\,\textcircled{3}\,9$; & adhuc breviùs, si dividatur per $\surd\,\textcircled{3}\,3$, fietque $11 + \surd\,125$.

Vbi notandum, postquam habetur binomium, cujus una pars est rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale esse debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut divisionem deductum est, extrahi posse.

Tertiò, ad extrahendam $\surd\,\textcircled{6}$, oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac $\surd\,\textcircled{3}$. Et ad extrahendam $\surd\,\textcircled{9}$ oportet bis extrahere $\surd\,\textcircled{3}$. Et sic de reliquis radicibus, quæ per numeros compositos, hoc est, qui per alios dividi possunt, designantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam satis nota est: quapropter hîc tantùm opùs est, ut doceam, quo pacto extrahendæ sint $\surd\,\textcircled{3}$, $\surd\,\textcircled{5}$, $\surd\,\textcircled{7}$, $\surd\,\textcircled{11}$, & similes aliæ, quæ per numeros primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Postremò ad extrahendam $\surd\,\textcircled{3}$, $\surd\,\textcircled{5}$, $\surd\,\textcircled{7}$, aut similem, per numerum primum designatam, explorandum primò est, utrum radix Binomium esse possit, cujus una pars sit rationalis. Id quod innotescit subducendo quadrata partium à se invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam si ex dato binomio $\surd\,\textcircled{3}$ sit extrahenda; aut surdesolidam, si $\surd\,\textcircled{5}$ sit extrahenda, & sic de cæteris. Quod ita in posterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum est, licèt expressè non dicatur. Etenim si radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò constat, radicem quæsitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc esse pos-

sit,

sit, cujus utraque pars sit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, si de radice cubica extrahenda quæstio fuerit; aut per quadratum hujus differentiæ, si de √⑤; aut per ejusdem cubum, si de √⑦; aut per ipsius surdesolidum, si de √⑪ quæratur, atque ita de cæteris. Quâ ratione aliud semper binomium habebitur, in quo radix differentiæ quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Vt ad extrahendam radicem cubicam ex 25 + √968, subduco primùm 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cujus numeri radix cubica est 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi possit, fore binomiam, cujus una pars futura sit rationalis. Similiter ad extrahendam √③ ex 22 + √486, oportet 484, quadratum à 22, subducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non potest, constat radicem cubicam ex 22 + √486 parte rationali carere: ac propterea 22 + √486 per 2 multiplicandam esse, ut habeatur binomium 44 + √1944, in quo radix differentiæ quadratorum partium est 2. Sic ad extrahendam radicem sursolidam ex 11 + √125, quoniam subductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus surdesolidus non est: hinc 11 + √125 multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat 176 + √32000. In quo radix sursolida differentiæ quadratorum partium est 4. Denique ad extrahendam √⑦ ex 338 + √114242, in quo differentia quadratorum partium est 2, quoniam hic numerus B-surdesolidus non est: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc est, per cubum ex 2, & fit 2704 + √7311488, in quo √⑦ differentiæ quadratorum partium est 2.

REGVLA.

Per præcedentem præparationem semper invenitur binomium, cujus una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiæ quadratorum partium, sunt numeri rationales integri; ex quo √③, aut √⑤, aut √⑦, &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus est numerus rationalis radice quæsitâ paulò major; ita ut differentia non major sit quàm $\frac{1}{2}$. Quod facilè per vulgarem Arithmeticam fieri potest.

Iam

Iam si pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque semissis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radicis quæsitæ. A cujus partis quadrato si auferatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi possit. Id quod facilè per multiplicationem hujus inventæ radicis experiri licet, quæ datum binomium, si aliqua ex eo extrahi possit, producere debet.

Verùm, si dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, subducere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radicis quæsitæ. Ad cujus partis quadratum si addatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modò radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut supra) manifestum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, cognito jam radicem cubicam differentiæ quadratorum partium esse 7, extraho radicem quadratam ex $\sqrt{968}$, quæ est major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum absolutum, addo 31 aut 32, & fit summa 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor est quàm 4, at major quàm $3\frac{1}{2}$; ita ut 4 sit numerus quæsitus rationalis, verâ radice paulò major. Postea ex 4 subtraho $\frac{7}{4}$ (hoc est, 7, radicem cubicam differentiæ quadratorum partium, postquam per radicem inventam 4 est divisa), & remanent $2\frac{1}{4}$. Subtraho autem, quoniam numerus absolutus 25 minor est quàm $\sqrt{968}$; si enim esset major addenda fuisset. Maximus verò integer numerus in $2\frac{1}{4}$ contentus, est 2, cujus semissis est 1, pars rationalis, radicis. Cujus quadrato 1, addo 7, $\sqrt{③}$ nempe differentiæ quadratorum partium, & fit summa 8, quadratum alterius partis. Ita ut $1 + \sqrt{8}$ sit $\sqrt{③}$ ex $25 + \sqrt{968}$, nimirum si $\sqrt{③}$ ex eo extrahi possit. Quod ut cognoscatur, oportet per multiplicationem investigare cubum ex $1+\sqrt{8}$; aut si brevitati consulamus, tantùm ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radicis, ad triplum ejus-

ejusdem partis 1, multiplicatæ per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, constat, $1 + \sqrt{8}$ esse veram radicem: si verò non conveniret, radicem extrahi non posse, liquidò constaret.

Eodem modo ad extrahendam $\sqrt{}$③ ex $44 + \sqrt{1944}$: radix cubica differentiæ quadratorum partium est 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero absoluto 44, & fit summa 88 aut 89, cujus $\sqrt{}$③ major est quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$. Quapropter subtractâ $\frac{4}{9}$, radice differentiæ quadratorum partium, divisâ per radicem rationalem, ex $4\frac{1}{2}$, pro radice rationali assumptâ, remanent $4\frac{1}{18}$. Et fit 2, semissis ex 4, pars rationalis radicis. cujus quadrato 4, si addatur 2, radix differentiæ, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Vt patet, addendo 8 ad ter 2, multiplicatum per 6, hoc est, 36; & fit summa 44, pars rationalis binomii dati: adeoque $2 + \sqrt{6}$ radix quæsita.

Ad extrahendam $\sqrt{}$⑤ ex $176 + \sqrt{32000}$; radix sursolida differentiæ quadratorum partium est 4; radix autem sursolida rationalis ex dato binomio est $3\frac{1}{2}$, unde subductis 4, divisis per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $1\frac{1}{7}$, remanebunt $2 + \frac{5}{14}$. Semissis verò ex 2 est 1, cujus quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit $1 + \sqrt{5}$, radix sursolida quæsita ex $176 + \sqrt{32000}$; saltem si aliqua inveniri possit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari potest, vel breviùs, addendo simul, surdesolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum ejusdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum ejusdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exsurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii sit æquale, sequitur $1 + \sqrt{5}$ propositi binomii esse veram radicem.

Ad extrahendam $\sqrt{}$⑦ ex $2704 + \sqrt{7311488}$; radix B-sursolida differentiæ quadratorum partium est 2; radix autem B-sursolida rationalis totius binomii est $3\frac{1}{2}$, cui addo $\frac{4}{7}$ (quoniam hîc numerus absolutus major est), & fit summa $4\frac{1}{14}$: ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cujus quadrato 4 subtraho 2, radicem B-sursolidam differentiæ quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porrò multiplico $2 + \sqrt{2}$ B-sursolidè, vel breviùs, in unam summam colligo; 128, B-sursolidum ex 2;

 1344,

1344, vicies & semel sursolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex √ 2; 1120, trigesies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex √ 2; & 112, septies 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex √ 2, & provenient 2704. Vnde manifestum fit, 2 + √ 2 esse radicem quæsitam.

Cæterùm observandum hîc est, postquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut divisum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam sit inventa, quòd, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut divisum.

Sic quoniam ad extrahendam √ ③ ex √ 242 + $12\frac{1}{2}$, ipsum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus posterioris binomii radicem invenimus esse 1 + √ 8; dividendum erit 1 + √ 8 per √ ③ ex 2, & fiet √ ③ $\frac{1}{2}$ + √ ⑥ 128, radix cubica ex √ 242 + $12\frac{1}{2}$.

Multiplicavimus $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$ per √ 5, & invenimus √ 242 + $12\frac{1}{2}$, cujus radix est √ ③ $\frac{1}{2}$ + √ ⑥ 128; quâ divisâ per √ ⑥ 5, emerget √ ⑥ $\frac{1}{20}$ + √ ⑥ $\frac{128}{5}$, pro radice ex $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$.

Multiplicatum est √ 242 + √ 243, primò per √ 2, & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica 2 + √ 6 dividenda sit per √ 2, & prodibit √ 2 + √ 3, pro radice cubica quæsita ex √ 242 + √ 243.

Divisimus √ ② 3993 + √ ⑥ 17578125 per √ ③ 3, & multiplicavimus per 16, ad extrahendam √ ⑤: quare necesse est inventam radicem 1 + √ 5 dividere per √ ⑤ 16, & multiplicare per √ ⑩ 3, ut habeatur vera radix sursolida ex dato binomio.

SEQVITVR DEMONSTRATIO.

IN primis est ostendendum, quòd, si binomium aliquod in se multiplicetur cubicè, proveniat semper aliud binomium, cujus partium quadrata, à se invicem subducta, relinquant cubum differentiæ, quadratorum partium radicis sive primi binomii. Id quod

quod manifestum fit, supponendo binomium illud designari per $a \pm \sqrt{bc}$, quod in se multiplicatum quadratè producit binomium $aa+bc \pm 2a\sqrt{bc}$, & hoc rursus per $a \pm \sqrt{bc}$, producit binomium $a^3+3abc \pm \overline{3aa+bc}\sqrt{bc}$; utpote cubum ex $a \pm \sqrt{bc}$.

Vbi notandum, quòd, licèt in binomio plures reperiantur partes, tamen non nisi pro duabus sint habendæ, quarum una, utpote, a^3+3abc, designet numerum rationalem, at verò $3aa+bc\sqrt{bc}$, numerum irrationalem seu surdum. Deinde constat, partem rationalem a^3+3abc, compositam esse ex cubo partis rationalis radicis, & ex triplo solido, quod fit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radicis: ac denique, si dictarum partium a^3+3abc & $\overline{3aa+bc}\sqrt{bc}$ quadrata $a^6+6a^4bc+9aabbcc$ & $b^3c^3+6aabbcc+9a^4bc$ à se invicem auferantur, relinqui $a^6 \sim 3a^4bc+3aabbcc \sim b^3c^3$, cubum ex $aa \sim bc$, differentiâ quadratorum partium radicis.

Signum $\sim$ significat differentiam inter duas pluresve quantitates, cùm non exprimitur aut cognoscitur, penes quas sit excessus.

In numeris. Esto $a \propto 2$, $\sqrt{bc} \propto \sqrt{6}$. Hinc multiplicato binomio $2+\sqrt{6}$ in se cubicè, fit binomium $44+\sqrt{1944}$: in quo partium quadrata, 1936 & 1944, à se invicem subducta, relinquunt 8, cubum differentiæ quadratorum partium.

Deinde ostendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere semper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium sit numerus cubicus.

Quod patet si multiplicetur binomium $a \pm \sqrt{bc}$, per $aa \sim bc$, differentiam quadratorum partium. Exsurgit enim binomium $a^3 \sim abc \pm \sqrt{a^4bc \sim 2aabbcc+b^3c^3}$: cujus partium quadrata, $a^6 \sim 2a^4bc+aabbcc$ & $a^4bc \sim 2aabbcc+b^3c^3$ à se invicem subducta, relinquunt $a^6 \sim 3a^4bc+3aabbcc \sim b^3c^3$, numerum cubicum, cujus radix cubica $aa \sim bc$, est, ut supra, differentia quadratorum partium prioris binomii $a \pm \sqrt{bc}$.

In numeris. Sit $a \propto 22$, & $\sqrt{bc} \propto \sqrt{486}$. Vnde multiplicato binomio $22+\sqrt{486}$ per differentiam quadratorum partium 2, prodibit binomium $44+\sqrt{1944}$: in quo differentia quadratorum partium est 8, utpote cubus differentiæ 2, quæ est inter 484 & 486, partium quadrata prioris binomii $22+\sqrt{486}$.

Quibus expositis, ad extrahendam $\sqrt{C}$ ex binomio $20+\sqrt{392}$, in quo pars rationalis 20 est major reliquâ parte $\sqrt{392}$:

cogitetur $a^3 + 3abc$ esse 20, & $\overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{392}$, ita ut $\begin{matrix} + a^3 & + 3aa \\ + 3abc + & bc \end{matrix}\sqrt{bc}$ designet datum binomium $20 + \sqrt{392}$, & radix ejus cubica $a + \sqrt{bc}$ ipsam radicem quærendam, cujus major pars sit a, & minor $\sqrt{bc}$. Tum operare secundùm regulam.

$20 + \sqrt{392}$
20

subt. $\left\{ \begin{matrix} 400 \\ 392 \end{matrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.

reliq. 8,

2 radix cubica reliqui, sive $aa - bc$.

Adde ad 20, partem rationalem binomii

— — 19, præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circiter. utpote à vero unitate non discedens, quippe qui inter 39 & 40 consistit. Vnde radix cubica sit major quàm 3 & minor quàm $3\frac{1}{2}$, ita ut $3\frac{1}{2}$ radicem veram non supra $\frac{1}{2}$ excedat. Sumatur autem quasi esset vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $aa - bc$,
per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$:
& fit $\frac{4}{7}$, sive $a - \sqrt{bc}$.
add. $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$,

& fit summa $4\frac{1}{14}$, sive $2a$, duplum partis rationalis, radicis. supponendo $3\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum $3\frac{1}{2}$ sit major radice verâ; ita tamen, ut differentia non sit supra $\frac{1}{2}$, fit, ut $4\frac{1}{14}$ quoque duplo partis rationalis major existat, & differentia minor quàm 1. sicut inferiùs ostensuri sumus. Vnde cum eadem pars sit numerus rationalis integer, sequitur duplum ejus fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4\frac{1}{14}$ contentum, adeoque ipsam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile est reliquam invenire. Etenim, si à 4, quadrato ejusdem partis, subducatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium dati binomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis; Ita ut radix inventa sit $2 + \sqrt{2}$.

Vbi

Vbi notandum, operationem hanc sufficere ad investigandam radicem, cùm constat illam binomium esse; sed quando id incertum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi binomii in se cubicè, aut etiam breviùs per sequentem operationem.

Divid. 40, hoc est, $2a^3 + 6abc$
per $\underline{4}$, hoc est, $2a$:
& fit quotiens $\overline{10}$, sive $aa + 3bc$.
Cui addatur ter 2, seu $\underline{6}$, hoc est, $3aa - 3bc$.
& provenit $\overline{16}$, sive $4aa$: quod est quadratum superioris 4, nimirum duplum partis rationalis inventæ 2. Vnde radix binomia erit, & duplum ejusdem partis 4: adeoque $2 + \sqrt{2}$ radix quæsita.

Vel etiam hoc modo:
Ad 8, hoc est, a^3
add. $\underline{12}$, hoc est, $3abc$:
& provenit $\overline{20}$, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{2}$ esse radicem quæsitam.
Omnino ut supra fuit expositum.

Similiter, ad extrahendam $\sqrt{}$ ③ ex $44 + \sqrt{1944}$, in quo pars rationalis 44 est minor reliquâ parte $\sqrt{1944}$; cogitetur (ut supra) $\begin{matrix} a^3 \\ +3abc \end{matrix}$ esse 44, & $\begin{matrix} 3aa \\ +bc \end{matrix}\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{1944}$, ita ut $\begin{matrix} a^3 \\ +3abc \end{matrix} + \begin{matrix} 3aa \\ +bc \end{matrix}\sqrt{bc}$ designet datum binomium $44 + \sqrt{1944}$, & illius radix cubica $a + \sqrt{bc}$ hujus radicem quærendam, cujus a sit minor pars, & $\sqrt{bc}$ major. Tum operare secundùm regulam.

$44 + \sqrt{\underline{1944}}$
subt. $\left\{ \begin{matrix} 1944 \\ \underline{1936} \end{matrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.
reliq. $\underline{8}$.
$\overline{2}$, radix cubica reliqui, sive $bc - aa$.

3 19 4	44 4 8

Adde ad 44 partem rationalem binomii
— — $\underline{44}$, præter propter valorem partis irrationalis:
& fit $\overline{88}$, valor binomii dati in rationalibus, circiter. quippe qui à vero unitate non absit, cum inter 88 & 89 consistat. Radix autem ejus cubica est major quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$;

ita

ita ut $4\frac{1}{2}$ sit major radice verâ, excessu minore quàm $\frac{1}{2}$. Assumatur autem ut vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $bc - aa$,

per $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc} + a$:

& fit quotiens $\frac{4}{9}$, sive $\sqrt{bc} - a$.

subt. { ex $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc} + a$,
$\frac{4}{9}$, hoc est, $\sqrt{bc} - a$:

& relinquitur $4\frac{1}{18}$, sive $2a$, duplum partis rationalis radicis, videlicet supponendo $4\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum major sit, fit ut etiam $4\frac{1}{18}$ excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; sicut mox ostendemus. Vnde cum eadem pars sit numerus integer rationalis: sequitur duplum ejusdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4 + \frac{1}{18}$ comprehensum: adeoque ipsam partem esse 2. Quâ inventâ, facile est reliquam partem invenire. Etenim si ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit summa 6, quadratum alterius partis: ita ut radix inventa sit $2 + \sqrt{6}$.

Vbi (ut supra) notandum, non opùs esse ut ulteriùs operemur, postquam constat radicem extrahi posse, hoc est, ipsam binomium esse: quandoquidem eo casu radix inventa fit quæsita. Illud autem si ignoretur, dignosci poterit multiplicando radicem inventam in se cubicè, aut etiam breviùs, hoc modo:

Divid. 88, hoc est, $2a^3 + 6abc$,

per 4, hoc est, $2a$:

& fit quotiens 22, sive $aa + 3bc$.

Subtr. ter 2, sive 6, hoc est, $3bc - 3aa$:

& relinquitur 16, sive $4aa$, quod est quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monstrat, duplum ejusdem partis esse 4, adeoque radicem quæsitam binomium esse, videlicet $2 + \sqrt{6}$. quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam sic:

Ad 8, hoc est, a^3

add. 36, hoc est, $3abc$:

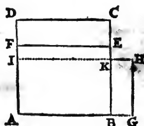
& provenit 44, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{6}$ esse radicem quæsitam.

Vt

Vt supra expositum fuit.

Quibus explicatis, demonstrandum nunc est, quod superiùs polliciti sumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum est, superante, scribatur m; at pro vera, quam in allatis exemplis per $a + \sqrt{bc}$ designavimus, brevitatis causâ scribatur v; similiterque pro $aa - bc$, differentiâ quadratorum partium radicis, scribatur d. Hinc, cùm d divisa per m dat $\frac{d}{m}$, quæ in primo exemplo ipsi m est addita, & in secundo exemplo ab m ablata; ostendendum est, differentiam, quâ $m + \frac{d}{m}$ excedit $v + \frac{d}{v}$, quod duplum partis rationalis, antea $2a$ nominatum, & quâ $m - \frac{d}{m}$ excedit $v - \frac{d}{v}$, quod similiter duplum partis rationalis, superiùs $2a$ nominatum, designat, unitate non esse majorem. Quod facile erit, si tantùm ostendatur excessum ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minorem esse excessu ipsius m supra v. hoc modo:



Esto $AB \infty v$, supra quam describatur quadratum $ABCD$, quod majus erit quàm d, quippe quæ tantùm differentiam designat, quæ est inter quadrata partium ipsius v, cujus quadratum earundem partium quadratis unà cum duplo sub partibus rectangulo est æquale. Hinc si supponatur rectangulum $ABEF \infty d$, erit $AF \infty \frac{d}{v}$.

Tum assumptâ $AG \infty m$, ita ut BG non superet $\frac{1}{2}$, factoque rectangulo $AGHI \infty d$, hoc est, æquali rectangulo $ABEF$: erit $AI \infty \frac{d}{m}$; nec non rectangulum $IKEF$ æquale rectangulo $KBGH$. Atque adeò cum IK sit major quàm KB, erit IF minor quam BG, hoc est, excessus ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minor erit excessu ipsius m supra v. Quod erat demonstrandum.

Eadem est ratio cùm dati binomii partes per signum — disjungun-

guntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium $20 - \sqrt{392}$. oportet tantùm signum — transmutare in signum +, atque ut supra ex $20 + \sqrt{392}$ radicem cubicam extrahere, quæ est $2 + \sqrt{2}$, & fit $2 - \sqrt{2}$ radix cubica ex $20 - \sqrt{392}$. Quemadmodum liquet ex iis, quæ superiùs sunt ostensa. Et sic de aliis.

Cæterùm, quæ hîc de radice cubica ostensa sunt, applicari quoque possunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem sunt allata: cum eadem ubique sit demonstrandi ratio, idemque processus; ita ut plura hac de re afferre non sit opùs. Tantùm sciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hactenus incognitas, inveniendas inservire posse. Qui quidem in eo consistit, ut, dum in aliqua quæstione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum esse certò constiterit, quæratur numerus fractus unitate verum non superans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

FINIS.



Celeberrimo, Amicissimoque Viro,

D. FRANCISCO à SCHOOTEN IOHANNES HUDDE

S. P. D.

Clarissime Vir,



T copiam Tibi faciam rogas, prolixam illam de Reductione Æquationum epistolam, sive libellum mavis, ut & alteram illam, quæ meam de Maximis & Minimis Methodum continet, Commentariis tuis in D. Cartesii Geometriam annectendi edendique. Certè, cum id non modò postules, sed etiam seriò, ut faciam, mihi author sis, in illam opinionem, sive imaginationem potius devenio, aliquid illis, tuo saltem judicio, contineri, quod laboribus in lucem edendi respondere queat; quippe cum continuo dies noctesque cogitationes tuæ circa illa, quæ aliquo commodo humanum genus beare possint, versentur occupenturque, nec unquam, vel levissimo indicio, deprehendere potuerim, Te, secus ac Batavum deceat, aliud clausum in pectore premere, aliud verò linguâ promere, in animum inducere nequaquam potui, Te, eo tantùm temporis articulo, quo has posceres, mihique ut facerem author esses, à consuetâ tibi & regiâ viâ deflexisse. Præterea amicitiæ nostræ, nec hodie, nec heri natæ, vinculum, tuusque candor singularis, mihi satis superque, Te nequaquam hoc ab animo tuo impetraturum fuisse, testatum faciunt. Quare, si hac in re Tibi obluctarer, commissi erroris fortasse insimularer. Non pauca tamen obstant, quo minus assensum planè præbeam. Non enim Te latet, me multâ temporis egestate, quod tunc aliis studiis

destinâram, hæc non ita ad normam exigere potuisse, quam illa quidem, quæ publico usui viritim legenda terendaque permittuntur, quasi suo quodam jure postulant: cum non tantùm benevolorum amicorum, sed etiam vitilitigatorum, acerborùmque inimicorum, quorum si non in præsens, in posterum fortasse copia suppetere possit, judicium subire debeant. At fortè inquies, quòd non sub libelli, sed epistolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem proditura sint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis studiis animum applicassem, ideoque nullo merito accuratam illam diligentiam, summamque curam, omniumque probationes desiderari posse. Sed quid causæ est, quin paulo diutius exspectem, illaque, quibusdam præterea additis, sub libelli nomine, accuratius elaborata publici juris faciam? maximè cum libellum quendam, (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis,) de Natura, Reductione, Determinatione, Resolutione, atque Inventione Æquationum *prælo subjicere proposuerim, (nisi sontica quædam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quædam excipias, in numerato habeo, adeo ut non nisi in ordinem redigendi labor & quasi forma desideretur. Cum enim in animo habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo, quod dicitur, rem ipsam ordiri, & per numeros gradusque procedere, nec uno impetu montis verticem superare cupit, intelligi & in usum transferri possit; certè multò magis, procul omni dubio, utilitate suâ, quam hæ epistolæ, quæ non nisi partem continent, eamque ita, ut dictum est, scriptam, se publico commendaret. Sed jam mihi responsionem tuam audire videor: Quid obstat, Huddeni, quominus utriusque nos participes facias?*

Nam bene conveniunt unaque in sede morantur.

Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quasi abortivus fœtus.

fœtus, tum allaturus est? Nullum equidem, fortasse, inquies, ubi consummatior se conspiciendum præbuerit, sed jam quidem quandiu ille intra penetralia Vestæ latet, cum experientiâ in omnibus pæne scientiis compertum sit, illos, qui earum amore tenentur, vel quibus res curæ & cordi est, eamque quam penitissimè, & quam maximè fieri potest, circumspectè rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manuductionem ad eam requirant; vel nudam modo, omnibus demonstrationibus, quasi supervacaneis ornamentis, neglectis, veritatem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum medullam ingenio suo penetrare illis datur, cum ex parte iis quoque investigandi labor incumbat: partim majore voluptate perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum veritatem in apricum producendam evadunt. Cum etiam id experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, aliquid, quod communem captum superet, & cornicum quasi oculos configat, elaboratum dare posse. Vnde illud confici videtur, scientiarum amatoribus satis superque dictum, nec mihi fas licitumque esse, illud subducere aut invidere iis, quibus, si non aliis, aliquo modo satisfacere queat. quibus addere posses: alios, licèt multis in locis, ejus, quod dicitur, veritatem demonstrationibus fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi tantùm brachio attigi,) non reperturi sint, nihilominus multas regulas ad usum, cujus respectu non paucæ ad amussim factæ sunt, transferre posse. Atque ita jam causam meam contra me ipsum egisse videor, ut vix mutire vel hiscere adversus ea, quæ dixi, mihi licitum videri possit, si in Lectores, quales esse decet, incidere mihi contingat: sed cum maxima hominum pars eò propendeat, ut ante de re aliqua, quam illam clarè & distinctè perceperit, judicium ferat, remque potius in deter o-

rem, quam meliorem partem interpretetur, atque eorum judicium sit periculi plenum, si circa res versetur, quæ non exactè scriptæ, dilucidè explicatæ, demonstrationibus subnixæ sunt; eoque magis si illæ paucis verbis indicatæ fuerint, ipsaque res ita sit comparata, ut non nisi difficulter paucis verbis ita se comprehendi sinat, quin alicubi aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem suscipere possit, irrepat, seque immisceat: Cumque multo maxima pars eorum quæ epistolis meis continentur talia sint, demonstrationibusque destituta, verbisque paucis, uti jam dictum, indicata, cum Tibi hoc plusquam abundè sufficeret; Satis mihi vel hoc solum, causæ videtur, epistolarum editioni, nulla ex parte suffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam sperare fas sit, hac in parte uti, measque literas non nisi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, investigant, manus incidere, neque meos Lectores tales esse, qui, ubi ad dubium verbum, quasi scopulum, offenderint, veritati consonâ significatione insuper habitâ, eam magis quæ falsitatis aliquid secum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in sinu gaudentes, & castellanos nescio quos triumphos ducentes, quasi verò jam repererint aliquid, quo suspectam autoris inventionem reddant, ejusque apud alios existimationem elevent, ut ipsi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, si fieri possit, ruinâ gradum sibi ad gloriolam, licèt inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ posse negamus,

Tamen adhuc plura obstant: nam, cum non tantum typopraphicæ emendationis molestiam, satis sæpe tædiosam, Te devoraturum, sed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me scripta sunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus est mos, obtuleris, videor mihi satis graviter in publica commoda peccaturus, nisi repulsam feras. Nonne enim

tempus illud, quod operæ illi impendere necesse habebis, nec id modicum, tum propter rite in Latinum sermonem convertendi, tum propter recte, ubi prælo subjecta fuerint, corrigendi molestiam, melioribus curis impendere, bonasque horas melius collocare posses? nisi enim me experientia docuisset, quid non possis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego sum conscius, optatum Tibi exitum consequutus fueris, facilius assensum præberem. Ne igitur impræsentiarum ægrè feras, quòd is audire nolim, qui, cum tempori tuo non contemnendam partem suffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidisse videri possit. Atque adeo omnes hæ rationes eo me impellerent, ut, nisi à mea consuetudine abhorreret, amicis aliquid denegare, jam sine omni dubio repulsam ferres. Quid ergo in re dubia consilii? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; sin id recusem, optimo meorum amicorum præter consuetudinem refragabor. sed in omnes partes mentem versando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperisse, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec assentior, nec repugno editioni epistolarum, sed totum hoc, quicquid est, Tibi plane trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & sequaris, ubi rationum mearum momenta non præoccupato, sed libero ac provido animo perpenderis, libraverisque. Vale, Vir Amicissime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amstelædami ipsis
Calendis Aprilis 1658.

IOHANNIS HVDDENII
EPISTOLA PRIMA
DE
REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

Clarissimo, Præstantissimoque Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO IOHANNES HUDDE

S. P. D.

Doleo, Vir Amicissime, quòd dubia valetudine & negotiis impeditus amicæ petitioni tuæ, de iis latiùs deducendis, quæ de Reductione Æquationum ad Amicum quempiam ante aliquot annos breviter perscripseram, hactenus satisfacere nequiverim. Impræsentiarum ergo aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) decidam, ut promissa, si non in totum, ex parte saltem exsolvam, ne vel nimis longa te offendat mora, vel nomen malum apud te audiam, quamvis non videaris immeritò mihi crimen illud impingere posse, sed tamen velim memor sis Belgici adagii: Die noch wat betaalt, wil noch betalen, en is van de quaatste slagh niet.

Quod igitur ad *Reductionem Æquationum* attinet, eam duobus modis considero, vel quatenus æquatio *absolutè* considerari potest, vel *relativè* in quantum scilicet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit, referre licet.

Primò verò eam *absolutè* considerabo, omissa vulgari Reductione, quæ per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem & extractionem procedit: ponamque tantùm Reductionum Regulas quasdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exemplis, ut mentem meam meliùs percipias, illustrabo, relictis earum demonstrationibus, tum quòd maxima earum pars sit perquàm inventu facilis, tum, quod rei

caput

caput est, quòd hominis foret otio suo abutentis, eas tibi (cui, quicquid in Mathesi inaccessum aliis videtur, perspectum est,) transmittere.

Et ut distinctius meos conceptus exprimam, primo restringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas reperitur, quam semper nominabo x; & in quibus Primus Terminus (Primum Terminum eum dico, in quo x plurimarum est dimensionum; Secundum, ubi x est unâ dimensione minor, & sic porrò) non est multiplicatus aut divisus per aliquam cognitam quantitatem, atque semper affectus signo +: Quia non tantum hoc pacto omnes æquationes considerare consuevimus, sed etiam quia nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet notum est, ad talem formam, si eam non habeant, redigi possunt.

SEQUENTES NOVEM REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ INVENIANTUR.

I. REGULA.

Si in æquatione literali una vel plures literæ seu quantitates cognitæ supponantur ∞ o, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est neque Propositam æquationem reducibilem fore; at verò si *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ista resultans reduci non poterit.

Exem-

Exemplum, ubi ultimus Terminus non evanescit.

Sic in æquatione

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -3axx & +2bbx & -3a^3 & \infty\ 0, \\ & -b & +3ab & -b^3 & \\ & & +4aa & -5aab & \\ & & & -4bba & \end{array}$$

si supponatur $a \infty 0$, resultabit, inde $x^3 - bxx + 2bbx - b^3 \infty 0$. Quia autem hæc æquatio reducibilis non est, certum est neque Propositam reducibilem fore.

Exemplum, ubi ultimus Terminus evanescit.

Si in æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^6 & -6abx^4 & +6c^3x^3 & +6a^3bxx & -12aac^3x & +12c^5d\ \infty\ 0 \\ & -3aa & +ccd & & -6abccd & -12abbc^3 \\ & & -bba & & +6aab^3 & \end{array}$$

supponantur d & $a \infty 0$, resultat inde $x^3 + 6c^3 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum reduci nequit, argumentum est neque Propositam ad pauciores dimensiones quàm ad tres, reducibilem fore.

Sic etiam supponendo d & $b \infty 0$, vel tantùm $c \infty 0$, orientur hæ duæ æquationes

$$x^5 - 3aax^3 + 6c^3xx - 12aac^3 \infty 0.$$

$$\begin{array}{ll} x^5 - 6abx^3 - bbaxx + 6a^3bx + 6aab^3 \infty 0. \\ \quad -3aa & \end{array}$$

Quæ si reduci non poterunt, denotabunt Propositam æquationem, ad pauciores dimensiones quàm ad 5, reduci non posse.

Dico, *illam non ad pauciores dimensiones reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. quemadmodum contingit in hac $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 \infty 0$, supponendo $a \infty 0$: exsurgit enim $x^3 + 2b^3 \infty 0$, quæ non potest reduci, & tamen æquatio Proposita est reducibilis per $x - 2a \infty 0$.

II. *REGVLA.*

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel omnibus literis seu quantitatibus cognitis, supponan-

 tur

tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, sive numeralis, sive literalis, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est, neque Propositam æquationem reducibilem fore; si verò *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones, quàm ista Resultans, reduci non poterit.

Exempla, ubi ultimus Terminus non evanescit.

1. Si in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2axx & +3bbx & -3a^3 \;\infty\, 0 \\ & -\;b & +3ab & -3b^3 \\ & & +4aa & -6aab \\ & & & +9abb \end{array}$$

supponatur $a \infty 1$, & $b \infty 1$, resultabit inde æquatio numeralis $x^3 - 3xx + 10x - 3 \infty 0$. Quæ, quoniam non est reducibilis, indicabit, neque Propositam æquationem reducibilem esse.

2. Sic etiam, si habeamus hanc

$$\begin{array}{llll} x^5 *** & +4aabbx & -10a^4b \;\infty\, 0, \\ & -\frac{3a^3bb}{a-b} & -\frac{2}{3}b^3aa \end{array}$$

atque supponamus $4aabb \infty \frac{3a^3bb}{a-b}$, seu $b \infty \frac{1}{4}a$, exsurget inde $x^5 **** - 2\frac{49}{96}a^5 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio reduci non potest, certum est, neque Propositam reducibilem fore.

3. Non secus, si in æquatione

$$\begin{array}{llll} x^5 ** & -8a^3xx & +4ca^3x & -2a^3cd \;\infty\, 0 \\ & -2aac & +accd \end{array}$$

supponatur $-8a^3 - 2aac \infty 0$, seu $c \infty -4a$; ac $4ca^3 + accd \infty 0$, seu $d \infty -\frac{4aa}{c}$, fiet inde $x^5 **** + 8a^5 \infty 0$. Quoniam verò hæc æquatio non reducibilis existit, *certum est, &c.*

4. Eodem modo se res habet in æquationibus, ubi quantitates Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, si detur hæc æquatio $x^5 ** + xx\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, * + a^3b\sqrt{C. \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}abb} \infty 0$, supponendo $\frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, seu $bb \infty -\frac{1}{4}aa$, resultabit $x^5 **** + a^3b\sqrt{C. \frac{25}{216}a^3} \infty 0$. quæ, quoniam reduci non potest, *certum est, &c.*

Exem-

Exempla, ubi æquatio Resultans pauciores quàm Proposita dimensiones habet.

1. Si habeatur

$$\begin{array}{llllll} x^4 + 4cx^3 & + 4ccxx & - 4bbcx & + b^4 & \infty\, 0, \\ & - dd & & - bbdd & \\ & - 2bb & & & \end{array}$$

ac supponatur $c \infty 1$, $b \infty 1$, $d \infty 1$, resultabit inde æquatio numerica $x^3 + 4xx + 1x - 4 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum non existit reducibilis, etiam æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ad tres reduci non poterit.

2. Si proponatur

$$\begin{array}{ll} x^3 - \tfrac{1}{4}ab\sqrt{xx+aa-bb} + 3axx + \tfrac{1}{4}abx - aab & \infty\, 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + bb\sqrt{3aa+bb} & \end{array}$$

& supponatur $aa - bb \infty 0$, seu $a \infty b$, resultabit $x^3 + 3axx * + a^3 \infty 0$. quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propositam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimensiones reduci non posse.

Dico *non ad pauciores dimensiones illam reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. Quod etiam in 1ma Regula locum habuit, ibique explicatum est. Sed si roges, quot ego dimensiones 2do huic exemplo adscribam? respondeo, me tot dimensiones cuilibet æquationi adscribere, quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet, dempto omni signo radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud 2dum exemplum habiturum 6 dimensiones, postquam signum radicale ante quantitatem incognitam, nempe $\sqrt{xx + aa - bb}$, ablatum fuerit.

NOTÆ *duæ in hanc* I & II *Regulam.*

I. Notandum est, utramque hanc Regulam non tantùm magnum habere usum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis sit, verùm etiam eodem modo inquiri posse:

1mo. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis composita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis sit, dividi possit.

2do. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

3tio. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem divisorem.

Nam, *si non admittant divisorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem*, illud plerumque, monstratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel saltem admodum facilè, innotescet; præsertim in æquationibus vel quantitatibus valde compositis, atque ex multis diversis literis constantibus, quod sæpenumero ineundo aliam viam valde difficile inventu esset, magnumque & laborem & industriam requireret. Hæc enim Methodus tantùm exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (supponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum sumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde scimus non admittere reductionem, vel rationalem divisorem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem. Quod omne, exemplis explicare, supervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi usum enumerare, quem satis insignem esse jam patuit; ac vel eo nomine, quòd ipsa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non rarò magnum adfert compendium.

Denique, *si æquationes, vel quantitates compositæ, admittant reductionem, vel divisorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem divisorem*, possunt etiam illa omnia in multis casibus hâc Methodo satis compendiosè inveniri. sed hæc non sunt hujus loci, posthac fortassis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per *æquationem ex Proposita Resultantem*, necessarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maximè quia id etiam in sequentibus Regulis, ubi litera aliqua ∞ o supponitur, usum suum habebit. Quando enim una pluresve literæ vel quantitates ∞ o sumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Proposita æquatione necessariò evanescere. quemadmodum in allatis exemplis quoque est videre. Adeò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Resultantem intelligam. Sed si literales fractiones dantur, tunc quidem facilè, nisi quis probè animum advertat, error committi posset. Etenim fractionis numeratore ∞ o existente, tollenda est ista fractio ex Proposita æquatione; at denominatore ∞ o existente, oportet terminos omnes æquationis primùm per ejusmodi deno-

denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in quâ ſcilicet nulla ampliùs reperitur fractio literalis, cujus denominator eſt $\propto$ o, & in qua conditiones omnes aſſumptæ, ſive ſuppoſitiones, ſunt adimpletæ, illa, quam ex Propoſita reſultare dico.

Exempla.

ÆQVATIONES PROPOSITÆ.		ÆQVATIONES RESVLTANTES.
$\begin{array}{l} xx - \frac{cc}{a}x + cc \propto 0 \\ \quad + b \quad - aa \\ \qquad\quad - \frac{ccb}{a} \\ \qquad\quad + ab \end{array}$ ſupponatur	$c \propto 0$	$\begin{array}{l} xx + bx - aa \propto 0 \\ \qquad\qquad + ab \end{array}$
	$a \propto 0$	$-ccx - ccb \propto 0$, ſeu $x + b \propto 0$.
$\begin{array}{l} xx - cx + \frac{c^3}{2a} \propto 0. \\ \quad + a \quad - \frac{1}{2}cc \\ + \frac{ac}{a+b} - \frac{cca}{2a+2b} \\ - \frac{cc}{2a} \end{array}$	$c \propto 0$	$xx + ax \propto 0$, ſeu $x + a \propto 0$
	$a \propto 0$	$-\frac{ccx}{2} + \frac{c^3}{2} \propto 0$, ſeu $x - c \propto 0$.

$$x^5 ** + \frac{2ac - ab}{3a - b}xx + \frac{ccb^3}{3aa - ab}x + \frac{b^3a^3}{a+b} \propto 0,$$

ſuppoſitâ $3a - b \propto 0$:

habebitur $\overline{2ac - ab}$ in xx, $+ \frac{ccb^3}{a}x \propto 0$, ſeu $\begin{array}{l} + 2acx + \frac{ccb^3}{a} \propto 0. \\ - ab \end{array}$

Vnde, ſuppoſitione $3a \propto b$ adimpletâ, reſultat

$$\begin{array}{l} + 2acx + 27aacc \propto 0. \\ - 3aa \end{array}$$

Nec tantùm hoc obſervandum in æquationibus, ſed etiam in quantitatibus compoſitis, quarum communis menſura, vel diviſor, vel radix petitur. Vt, exempli gratiâ, ſi inquirere velis, num $\sqrt{}$ Q extrahi poſſit ex $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc - 2cd + dd} + 2bb$, & in eum finem ſuppoſuiſſes $cc - 2cd + dd \propto 0$: retinendum eſſet b^4, non autem $2bb$. Si enim $2bb$ retineres, concludendum foret,

meam sequendo methodum, quòd $\sqrt{Q}$ ex $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc - 2cd + dd} + 2bb$ extrahi non posset, quæ tamen est $c - d + \frac{bb}{c-d}$.

SEQUENTES 3, 4, ET 5 REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA ALIQUA LITERA INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

III. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ* litera *non habet eundem dimensionum numerum in diversis Terminis.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic dividi possunt, ut litera illa evanescat, ∞ o. Atque hoc in *singulis literis* instituo, verùm *uno tantùm modo.* Quippe id interdum variis modis fieri potest, quo casu illi præ cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum pervenire licet. Et, si Proposita æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublatæ, divisibilis erit.

1^mum^ *genus exemplorum, in quibus Propositæ æquationes nec numerales nec literales fractiones continent.*

1. Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - 6ax^3 & + 4bcxx & - 16abcx & + 16bbca \infty 0. \\ & + 4ac & - 16aac & + 48aabc \\ & + 16aa & - 8aab & + 32a^3c \\ & + 4ab & - 16a^3 & \end{array}$$

Primò

Primò itaque periculum faciam in litera a, supponendo $-16a^3x+32a^3c \infty 0$. Quæ sunt omnes quantitates per a^3 divisibiles, quæ in Proposita æquatione inveniuntur, & in quibus factâ divisione litera a evanescit: oritur enim $-16x+32c \infty 0$, seu, dividendo per -16, $x-2c \infty 0$.

Iam tento, num Proposita æquatio dividi queat per $x-2c \infty 0$. Nam si per hanc dividi non possit, *uti & , si hæc* $x-2c \infty 0$ *ab omni fractione non libera fuisset*, (*quod huic quidem primo exemplorum generi est proprium*) ad aliam literam transiissem. (Quamvis enim aliæ adhuc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus a continetur, quæque omnes per aliam quàm a^3 dividi possunt, sic ut litera a ubique evanescat, utpote supponendo

$$\begin{array}{l} +16aaxx - 16aacx + 48aabc \infty 0, \text{ ut \&} \\ \qquad\qquad\quad - 8aab \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca \infty 0; \\ \qquad\quad + 4ab \end{array}$$

tamen id *uno modo* in hac Regula tentasse sufficit.) Hinc cum Proposita æquatio per $x-2c \infty 0$ divisibilis non sit, transeo ad aliam literam, puta b. Quoniam autem hîc una tantùm quantitas existit, in qua bb reperitur, nempe $16bbca$, idcirco & hanc transeo, quandoquidem per $16bbca$ nullus valor ipsius x obtineri potest, & considero literam c, ponendo

$$\begin{array}{llll} 4bcxx & -16abcx & +16bbac \infty 0. & \\ 4ac & -16aac & +48aabc & \\ & & +32a^3c & \end{array}$$

Hæc igitur cum absque fractione dividatur per $4bc+4a^6$, ac oriatur $\begin{array}{l} xx-4ax+4ab \infty 0: \\ \qquad\qquad +8aa \end{array}$ inquirendum ulteriùs restat, an Proposita æquatio dividi possit per $\begin{array}{l} xx-4ax+4ab \infty 0. \\ \qquad\quad +8aa \end{array}$ inveniturque divisionem fieri posse.

Dixi in Regula, *quòd sufficiat, rem singulis literis uno tantùm modo tentasse, & quod illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui facillimas æquationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum pervenire licet.* Sic enim breviorem viam ingressus essem, si quantitates sumpsissem, in quibus a ubique unam tantùm dimensionem habet. Nam quoniam tunc obtineo $-6ax^3+4acxx+4abxx-16abcx+16bbca \infty 0$, primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi nequeat, quòd hæ quantitates non sine fractione dividi possint.

2. Eo-

2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3c\,xx & + ab\,x & - 2aab & \propto 0: \\ - 2a & + 6ac & + 3abb & \\ + 3b & - 9bc & & \end{array}$$

quia quantitas $-2aab$ in eâ sola reperitur, in qua a duas habet dimensiones; & quantitas $+3abb$ sola, in qua b duas dimensiones habet: idcirco transeo ad literam c, obtineoque

$$\begin{array}{l} -3c\,xx + 6ac\,x \propto 0 \\ - 9bc \end{array} \text{ seu } \begin{array}{l} -3c\,x + 6ac \propto 0. \\ - 9bc \end{array}$$

Id quod divisum per $-3c$, dat $\begin{array}{l} x - 2a \propto 0. \\ + 3b \end{array}$ Cujus ope Proposita æquatio dividi potest. Quod, si aliter evenisset, postquam jam periculum in omnibus factum esset literis, indicio fuisset, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

3. Similiter examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + b & xx + 2b\sqrt{ab+3bb} \text{ in } x & - 6bb\sqrt{ab+3bb} & \propto 0, \\ - \sqrt{ab+3bb} & & + 18b^3 & \end{array}$$

exordiens à litera a, invenio æquationem $-\sqrt{ab+3bb}$ in xx, $+2b\sqrt{ab+3bb}$ in x, $-6bb\sqrt{ab+3bb} \propto 0$. Quam divido per $-\sqrt{ab+3bb}$, & evanescit a, obtineoque hanc $xx - 2bx + 6bb \propto 0$; per quam Proposita dividi potest. Quòd si verò hæc divisio non fieri potuisset, progrediendum fuisset ad literam b. Quia autem liquet per b, secundùm singulas etiam suas dimensiones considerata, non posse aliquem ipsius x valorem inveniri: conclusissem, ut ante, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

4. Nec aliter se res habet in hac æquatione

$$\begin{array}{lll} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} - 2cxx & + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx & - a\sqrt{3cc+aa} \text{ in } \sqrt{xx+aa} \propto 0. \\ \phantom{x^3 - xx\sqrt{xx+aa}} + 2a & + ax\sqrt{xx+aa} - 3aax & + 3aa\sqrt{3cc+aa} \\ & + ax\sqrt{3cc+aa} & \end{array}$$

Nam primò video literam a negligi posse, quia sola $-3aax$ reperitur, nec ulla alia, quæ per aa sic dividi possit, ut ipsa a prorsus evanescat. Transeo itaque ad literam c, supponendo

$$-2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx \propto 0 \text{ seu } -2cx + 2c\sqrt{xx+aa} - 6ac \propto 0,$$

& fit, dividendo ubique per $-2c$, $x - \sqrt{xx+aa} + 3a \propto 0$. Cujus

ope

ope Propositam æquationem dividere licet. Quæ si per hanc dividi non potuisset, quia jam res singulis literis tentata esset, conclusissem, ut priùs, Propositam æquationem, &c.

2^dum genus exemplorum, in quibus Propositæ æquationes fractiones continent.

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia respectu operationis existit, quàm quòd Ficta æquatio, per quam divisio Propositæ tentatur, non necessariò, sicut ibi, ab omni fractione libera esse debeat. Quocirca unicum exemplum in medium adduxisse suffecerit.

Proponatur æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + \frac{2bb}{a+c}\,xx & + \frac{bba}{a+c}\,x & - \frac{1}{2}a^3 & \infty\ 0. \\ & +2b & +\frac{3}{4}aa & +\frac{1}{2}acc & \\ & & -cc & +2abb & \\ & & +ab & -2cbb & \\ & & & +2aab & \\ & & & -2bcc & \end{array}$$

Transeo literam a, propter quantitatem $-\frac{1}{2}a^3$, quoniam a nusquam ampliùs 3 dimensionum reperitur. Hinc transiens ad b, invenio $2bxx + abx + 2aab - 2ccb \infty 0$, seu dividens ubique per $2b$, $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$, per quam Proposita dividi potest. Quòd si verò hæc divisio fieri non potuisset, conclusissem; cum tantùm per literam c adhuc explorandum foret, atque hæc ipsa c non magis quàm litera a, sicut ex quantitate $-2cbb$ manifestum est, ad rem quidquam faciat; æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

Ordo verò, quem in hac inquisitione, an nimirum Proposita æquatio per hujusmodi Fictas divisibilis sit, observo, talis est: Primùm inquiro, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc ablata litera reperitur, in Proposita æquatione existant. Si enim plures reperiantur, tum ipsas omnes, quæ ita per illam dividi possunt, ut ea ubique evanescat, in unam summam colligo. (ut in hoc exemplo, quantitates omnes in quibus b duas dimensiones habet.) Quo peracto, si quotiens non idem sit cum præcedenti, per quod divisio examinatur, concludo, hanc divisionem fieri non

posse. Denique, si nullæ ampliùs in Proposita æquatione supersint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque simul per dictam Fictam divisibiles sunt futuræ, si quidem Proposita æquatio per eam divisibilis existat.

Vt $2bxx + abx + 2aab - 2bcc \infty 0$ div. per $+2b$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$,

itemq; $\frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + \begin{matrix} 2abb \\ -2cbb \end{matrix} \infty 0$ div. per $+\frac{2bb}{a+c}$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$.

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non convenisset, etiam Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$ divisibilis non fuisset.

Quoniam autem conveniunt, & nullæ ampliùs quantitates in Proposita æquatione supersunt, in quibus litera b reperitur, inquiro tandem, num omnes reliquæ etiam per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$ dividi possint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus b non reperitur, sint $x^3 * \begin{matrix} +\frac{1}{4}aa \\ -cc \end{matrix} x \begin{matrix} -\frac{1}{2}a^3 \\ +\frac{1}{2}acc \end{matrix}$, ipsæque per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix}$ dividi queant, ac oriatur $x - \frac{1}{2}a$; idcirco & Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \infty 0$ dividi poterit. Quæ aliàs, ut manifestum est, per illam non divisibilis fuisset, si ultima hæc divisio fieri non potuisset; Quotiens verò est $x - \frac{1}{2}a + \frac{2bb}{a+c} + 2b \infty 0$.

IV. *REGVLA*,

Quæ modum docet reducendi omnem Æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam ***comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque*** litera ***in aliquo termino tot dimensiones habet, quot in nullo alio.***

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic dividi

di possunt, ut illa *litera* evanescat, ∞ o. Atque hoc in *singulis literis* facio, verùm ***non uno duntaxat modo***, sicut in præcedenti 3^tia Regula, sed *modis omnibus*, *quibus id fieri potest*. Et si Proposita Æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam divisibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublatæ.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præscribit, quæ præcedens 3^tia; hoc tantùm excepto, quòd illic in singulis diversis literis duntaxat ***uno modo***, uti dictum est, hîc ***modis omnibus*** sit tentandum; sufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -ax^3 & +\frac{1}{2}aaxx & -\frac{1}{4}aabx & -\frac{1}{8}aabb & \infty\ 0. \\ & -\frac{1}{2}b & +1\frac{1}{2}ab & -\frac{1}{4}abb & -\frac{1}{4}ab^3 & \\ & & -\frac{1}{4}bb & & & \end{array}$$

Exordiens à litera *a*, prout unam habet dimensionem, obtineo $-ax^3 + 1\frac{1}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \infty 0$, seu $-x^3 + 1\frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 \infty 0$. Cujus ope Proposita æquatio dividi nequit (quod ipsum in hoc exemplo vel hinc apparet, quòd hîc ultimus terminus $-\frac{1}{4}b^3$, ultimum terminum Propositæ æquationis non absque literali fractione dividat). Iam, non quidem ad aliam literam transeo, quemadmodum in præcedenti Regula, sed tamdiu considerabo eandem *a*, quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimensionum reperitur. Atque ideo cum ipsa *a* hîc adhuc 2 dimensionum reperiatur, suppono similiter quantitates omnes, in quibus 2 dimensiones habet, ∞ 0: nimirum, $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{8}aabb \infty 0$, seu $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb \infty 0$, quæ Propositam æquationem dividere potest. Quod si secus evenisset, ad aliam literam transiissem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus *a* continetur, solummodo dividi possunt per *a*, vel *aa*. Quocirca facto periculo in singulis literis, & omnibus modis, si comperiatur, divisionem æquationis Propositæ per nullam Fictarum succedere, certum est, neque Propositam æquationem, ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci posse.

V. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur aliqua litera ∞ o; inveſtigeturque num æquatio, quæ hinc reſultat, habeat cum Propoſita communem diviſorem. Si non habeat, ſupponatur iterum alia litera ∞ o, inveſtigeturque. num iſta Reſultans habeat communem diviſorem: atque ſic porrò, donec aut communis reperiatur diviſor, aut nulla ampliùs litera ſuperſit, quæ non ſuppoſita ſit ∞ o. Et ſi non inveniatur communis diviſor, ſignum erit, æquationem Propoſitam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non poſſe.

Ex. gratiâ, ſi proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^5 * & +4ab\,x^3 & +30b^3\;xx & +34ab^3\,x & +20ab^4 & \infty\, 0, \\ & +bb & -10ab\cdot b & +7a^4 & +10a^4b & \\ & +\frac{a^4}{bb} & -\frac{2a^4}{b}. & & & \end{array}$$

ſupponaturque litera a ∞ o, reſultabit inde $x^5 * + bbx^3 + 30bbbxx$ ∞ o, quæ cum Propoſita communem habet diviſorem, nempe $xx - 3bx + 10bb$ ∞ o. Quod, ſi aliter eveniſſet, aliam literam, nimirum b, poſuiſſem ∞ o. & ſi inde Reſultans æquatio etiam non habuiſſet communem diviſorem, concluſiſſem æquationem Propoſitam, quoniam tantùm duas iſtas a & b diverſas habet literas, non reſultare poſſe ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo ſe habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opùs ſit alia exempla adjungere.

SE-

SEQUENTES 6ta, 7ma, ET 8va REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA IRRATIONALIS QUANTITAS INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

VI. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur*; *quæque* quantitas *non eundem dimenſionum numerum in diverſis Terminis habet.*

Suppono, &c.

VII. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæque* quantitas *in aliquo Termino tot habet dimenſiones, quot in nullo alio.*

Suppono, &c.

VIII. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6^{tam} & 3^{tiam} Regulam, & inter 7^{mam} & 4^{tam}, nec non inter 8^{vam} & 5^{tam} haud magna diſparitas exiſtit, & tantùm pro *litera* poni debet *irrationalis quantitas*; erunt hæ Regu-

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque idcirco hæc verba in 6ta Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non exstit*; & hæc in 7ma: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8^{vam} Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est *rationalis*, hoc est, *in qua nullum est signum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5ta & 8va Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc. illas ∞ o: cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd \infty 0$, & $d^4c - bbcdd + caabb - caadd \infty 0$.

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam *c*, fiuntque

$d^3 - add + 2aab - 2abd \infty 0$, & $d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0$.

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut *d*, *a*, vel *b*. Atque considerando ipsam, puta *d*, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1ma Æquatio	2da Æquatio
$d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$.	$d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0$. $ - aa$

Porrò valor ipsius d^3, per 1^{mam} æquationem inventus, substituatur

tuatur ubique in locum ipſius d^3 ſecundæ æquationis: invenieturque

$$d^4 \infty a d^3 + 2abdd - 2aabd \infty bbdd, + aadd - aabb$$

ſeu

$$aadd + 2aabd - 2a^3 b$$
$$- 2aabd + 2abdd$$

Hoc eſt, $aabb - 2a^3 b + 2abdd - bbdd \infty 0$

$$\& \; dd \infty \frac{2a^3 b - aabb}{2ab - bb} \text{ ſeu } aa; \; \& \; d \infty a, \text{ ſeu } d - a \infty 0.$$

Si jam hujus dd valor ſubſtituatur in ipſius locum in 1ma æquatione, habebitur $aad - a^3 - 2abd + 2aab \infty 0$.

Denique ſubſtituatur ipſius d valor a in ejus locum in hac ultima, obtinebitur $a^3 - a^3 - 2aab + 2aab \infty 0$.

In hac igitur cum termini omnes ſe mutuò deſtruant, indicio eſt tam æquationem $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$ quàm $d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0$ (with $-aa$ beneath $-bb$) eſſe diviſibilem per $d - a \infty 0$, & $d - a$ utriuſque maximum communem diviſorem exiſtere. Atque adeò, cum duæ Propoſitæ æquationes (vel quantitates) priùs per c ſint diviſæ, manifeſtum eſt earundem maximum communem diviſorem fore $d - a$ in c, ſeu $dc - ac$.

Quòdſi autem aliam literam quàm d ceu incognitam quantitatem conſideremus, licebit ſimiliter illius ope eoſdem ſemper diviſores invenire. Exempli gratiâ, ſi a ut incognita quantitas conſideretur, obtinebitur pro

1ma Æq.

$$aa - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$
$$- \frac{dd}{2b}$$

2da Æq.

$$aa - \frac{bbdd + d_4}{bb - dd} \infty 0.$$

$$\text{vel } aa - dd \infty 0, \text{ ſeu } aa \infty dd$$

$$\text{vel } a - d \infty 0, \text{ ſeu } a \infty d.$$

Subrogetur jam dd valor ipſius aa, per 2dam æquationem inventus, in locum aa primæ æquationis, & invenietur pro ipſa

$$dd - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$
$$- \frac{dd}{2b}$$

Denuo

Denuo in hac ultima in locum ipsius a subrogetur ejus valor d, obtinebitur $dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty o$.
$$- \frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rursus termini omnes se mutuò tollant, argumentum est, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem est ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate sumatur.

Si verò accidisset, ut nec per subrogationem valoris ipsius d^3, nec ipsius dd, nec deniquè ipsius d, termini omnes se mutuò destruxissent, argumentum fuisset, quòd duæ illæ æquationes
$$d^3 - add - 2abd + 2aab \infty o, \& \; d^4 * - bbdd * + aabb \infty o$$
$$- aa$$
nullum communem divisorem habuissent, & quòd duarum Propositarum æquationum, quæ priùs per c fuerunt divisæ, nullus communis divisor præter c extitisset. Excepto tantùm, ubi divisio fieri potest per ejusmodi quantitates, quæ simul possunt fieri ∞ o, atque in causa esse, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas consideratur, per istam æquationem inveniri non possit.

Exempli gratiâ, si in Propositis æquationibus literam b, ut incognitam quantitatem considerassem, obtinuissem

$$\overset{\text{pro } 1^{ma}}{b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa} \text{ seu } \frac{dd}{2a}}, \& \; \overset{\text{pro } 2^{da}}{bb \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa} \text{ seu } dd}$$
$$\text{vel } b \infty d.$$

Vbi videmus, valores ipsius b, nempe $\frac{dd}{2a} \infty d$, se invicem non tollere, ideoque concludendum esset, has duas æquationes non habere communem divisorem, si nempe ejusmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum ∞ o ponuntur, efficiunt, ut valor ipsius b inveniri nequeat. Quemadmodum si ponatur $d - a \infty o$, non poterit valor ipsius b per 1^{mam} æquationem inveniri: quippe tum d^3 erit ∞add.

Priusquam itaque concludatur, non dari duarum sive æquationum sive quantitatum communem aliquem divisorem: 1mo observandum venit, num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in causa esse possunt, quòd valor incognitæ literæ,

seu

ſeu inſtar incognitæ conſideratæ, per iſtam æquationem inveniri nequeat. 2[do] ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant. quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur $d - a \infty 0$, cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, ſubrogando a in locum d, uno intuitu videre eſt. At verò ſi aliter eveniſſet, concluſiſſem, non dari, &c.

Vnum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus inveniendum eſſe maximum communem diviſorem harum duarum æquationum ſive quantitatum

$$\begin{array}{cc} 1^{ma}\ \text{Æq.} & 2^{da}\ \text{Æq.} \\ 12a^4 + 11aaxx + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x \infty 0, & \&\ 12aaxx - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 \infty 0. \end{array}$$

Quoniam autem hæ non diviſibiles ſunt per aliquam literam nec per numerum, conſidero literam aliquam, ad libitum ſumendam, tanquam incognitam quantitatem, puta x, atque operationem porrò inſtituo, ut ſequitur

$$\begin{array}{rl} \text{per } 1^{mam} \text{ invenitur } x^4 \infty & 4ax^3 - 11aaxx + 20a^3x - 12a^4 \\ \text{add.} & \underline{-3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4} \\ \text{fit pro } 2^{da} \text{ æquatione} & \underline{ax^3 + aaxx + 4a^3x + 12a^4 \infty 0} \\ \text{div. per } a. & x^3 \infty -axx - 4aax - 12a^3 \end{array}$$

Subſtituatur jam hîc valor ipſius x^3 in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum interſit, poteſt tamen in multis caſibus magnum eſſe diſcrimen, tunc enim oportet, brevitatis causâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cùm duæ ſunt, dimenſionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque $xx \infty ax - 6aa$.

Subſtituatur rurſus hîc valor ipſius xx ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, ſumendo, brevitatis causâ, præcedentem 3 dimenſionum, invenietur

2da Æq.

$$\begin{array}{rl} x^3 \infty axx - 6aax \text{ ſeu} & \left.\begin{array}{l} +aax \\ -6aax \end{array} - 6a^3 \right\} \\ +axx \infty & \ \ +aax - 6a^3 \quad\ \ \} \infty 0 \\ +4aax + 12a^3 \infty & \ \ +4aax + 12a^3 \ \ \} \end{array}$$

In qua videmus terminos omnes ſe invicem tollere, quod arguit, haſce Propoſitas æquationes ſive quantitates diviſibiles eſſe

Hhh per

per $xx - ax + 6aa$; quæ ideo maximus est earum communis divisor.

Porrò manifestum est, si quis *omnes duarum vel plurium sive Æquationum sive Quantitatum communes divisores* invenire velit, tantùm inveniendos esse *divisores omnes Maximi earum communis divisoris*.

Præterea etiam liquet, non tantùm in multis casibus, per 1^mam^ & 2^dam^ Regulam (uti annotatum est) uno intuitu videri posse, duas Æquationes vel Quantitates non habere communem aliquem divisorem; verùm etiam Regulas omnes, de Reductione æquationum agentes, ad inveniendos omnes ipsarum communes divisores inservire posse.

IX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, quæ per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.

Ostendam hoc in uno aut altero tantùm exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi satis poterit.

Proponatur itaque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 \propto 0$, deturque illam dividi posse per aliam duarum dimensionum, cujus ultimus Terminus sit -2. Esto autem illa $xx + yx - 2 \propto 0$, seu, $xx \propto -yx + 2$. Hunc valorem ipsius xx ubique substituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propositæ obtineo, in qua x tantùm unius dimensionis reperitur: nimirum,

$\overline{y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5}$ in x, $-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \propto 0$.

quemadmodum ex sequenti operatione videre est.

$xx \propto$

$$\overline{xx \infty -yx+2}$$

$$\text{ergo } x^4 \infty yyxx - 4yx + 4 \text{ seu } \begin{array}{l} -y^3x + 2yy \\ -4yx + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^5 \infty -y^3xx + 2yyx \\ \quad -4yxx + 4x \end{array} \text{ seu } \begin{array}{l} +y^4x - 2y^3 \\ +2yyx \\ +4yyx - 8y \\ +4x \end{array}$$

$$-4x^4 \infty \qquad \begin{array}{l} +4y^3x - 16 \\ +16yx - 8yy \end{array}$$

$$+4x^3 \infty -4yxx + 8x \text{ seu } \begin{array}{l} +4yyx - 8y \\ +8x \end{array}$$

$$+1\tfrac{1}{2}xx \infty \qquad -1\tfrac{1}{2}yx + 3$$

$$-7x - 3 \infty \qquad -7x - 3$$

$$\text{summa } \begin{array}{l} +y^4x - 2y^3 \\ +4y^3 \;\; -8yy \;\; \infty 0. \\ +10yy - 16y \\ +14\tfrac{1}{2}y - 16 \\ +5 \end{array}$$

Deinde considero unumquemque terminum separatum æquationis hujus deductæ ∞ o, & cum hîc duo tantùm sint termini, habebo inde hasce duas æquationes

$$\overset{\text{I.}}{y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 \infty 0}, \;\&\; \overset{\text{II.}}{-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0}$$

$$\text{seu } \quad y^3 + 4yy + 8y + 8 \infty 0.$$

Quarum quidem æquationum, si juxta præcedentem methodum quæratur maximus communis divisor, invenietur pro ipso $y + 2 \infty 0$; ita ut Proposita æquatio, cum y sit $\infty -2$, divisibilis sit per $xx - 2x - 2 \infty 0$.

Eodem modo, proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0 \\ \qquad\qquad\quad\; - cc \end{array}$$

deturque ipsam dividi posse per æquationem duarum dimensionum, cujus ultimus terminus sit $+aa$. Esto autem æquatio illa $xx + yx + aa \infty 0$, adeoque $xx \infty -yx - aa$. Hinc, subrogato hoc valore in locum xx, obtinebitur loco Propositæ æquationis alia, in qua x unius tantùm erit dimensionis, nempe

$$\begin{array}{l} -y^3 \\ -2ayy \\ +ccy \end{array} x \quad \begin{array}{l} -aayy \infty 0. \\ -2a^3y \\ +aacc \end{array}$$

 Cujus

Cujus si unusquisque separatus terminus rursus consideretur ∞ o, habebimus has duas æquationes

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & & \text{II.} \\ -y^3 - 2ayy + ccy \infty 0, & \& & -aayy - 2a^3y + aacc \infty 0. \\ \text{seu} & & \text{seu} \\ -yy - 2ay + cc \infty 0 & & -yy - 2ay + cc \infty 0. \end{array}$$

Cum igitur harum communis mensura seu divisor sit $-yy - 2ay + cc \infty 0$, quæro hinc valorem ipsius y: invenioque $y \infty -a \pm \sqrt{aa+cc}$, ac proinde æquationem Propositam esse divisibilem per $xx - a \pm \sqrt{aa+cc}$ in x, $+ aa \infty 0$.

Similiter, si detur, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^5 * & + bb\,x^3 & + 3abb\,xx * & + 2ab^4 \infty 0 \\ & + aa & - 2a^3 & \end{array}$$

esse divisibilem per aliam 3 dimensionum, cujus tertius terminus sit $+2aax$: pono pro ipsa $x^3 + yxx + 2aax + z \infty 0$, seu $x^3 \infty -yxx - 2aax - z$. Quo valore ubique in locum x^3 in Proposita æquatione subrogato, obtinebitur

$$\begin{array}{lllll} -z & xx & +yz & x & +aaz \infty 0. \\ +3aay & & +2a^4 & & -yyz \\ -y^3 & & -2aayy & & -bbz \\ -bby & & -2aabb & & +2ab^4 \\ +3abb & & & & \\ -2a^3 & & & & \end{array}$$

Quoniam autem hæc æquatio 3 habet separatos terminos, habebuntur inde hæ 3 æquationes

$$\begin{array}{c} 1^{ma} \\ -z + 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3 \infty 0, \\ 2^{da} \qquad\qquad\qquad\qquad 3^{tia} \\ yz + 2a^4 - 2aayy - 2aabb \infty 0, \quad aaz - yyz - bbz + 2ab^4 \infty 0. \end{array}$$

Hinc per 1^{mam} sublatâ z, quæ est $\infty\ 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$, invenietur pro 2^d:

$$\begin{array}{lllll} -y^4 * & + aayy & + 3abby & - 2aabb \infty 0, \\ & - bb & - 2a^3 & + 2a^4 \end{array}$$

& pro 3^{tia}:

$$\begin{array}{llllll} +y^5 * & - 4aay^3 & + 2a^3yy & + 3a^4\,y & + 5a^3bb \infty 0. \\ & + 2bb & - 3abb & - 4aabb & - 2a^5 \\ & & & + b^4 & - ab^4 \end{array}$$

Quarum duarum maxima communis mensura per superiorem me-

methodum est $y - a \infty 0$, ideoque $y \infty a$; cumque z sit $\infty\ 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$, erit inde z etiam $\infty + 2abb$. Æquatio autem, per quam Proposita dividi potest, posita erat $x^3 + yxx + 2aax + z \infty 0$. Quocirca si in hac subrogentur valores quantitatum incognitarum y & z, invenietur pro ipsa $x^3 + axx + 2aax + 2abb \infty 0$.

Atque ita de aliis omnibus Propositis æquationibus, sive rationalibus sive irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus; atque etiam sive ultimus Terminus, sive aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Propositæ dividi queunt, datus fuerit, sive alicui quantitati (ut in his exemplis), sive nihilo æqualis sit; cujus quidem generis nullum exemplum affero, cum operatio haudquaquam diversa existat. Id tantùm addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formæ æquationum inveniri posse.

10ma, ET 11ma REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ REPERIANTUR, EXCEPTIS TANTUM ILLIS ÆQUATIONIBUS, IN QUIBUS SIGNA RADICALIA SUNT, QUÆ INCOGNITAM QUANTITATEM INCLUDUNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia signa radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, si in æquatione Proposita talia fortè fuerint, primùm tollantur; sequentes verò Regulæ, quibus omnia signa sine discrimine primùm auferantur: præmittam

Modum tollendi signa radicalia ex qualibet æquatione Proposita.

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio $n \infty e + g + h + k + m$, &c. in qua 1°: quælibet litera quantitatem designet, signo radicali $\sqrt{Q}$ adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evanescet signum quantitatis n. Quoniam autem reliquæ literæ e, g, h, k, m, &c. aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale, in quantum duas habent, evanescet; manifestum est, ob-

tineri posse æquationem, in qua e æquatur aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quæ æquatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratè, evanescet pariter signum radicale ipsius e; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimensiones, ac ipsæ in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, & quantùm ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandæ sunt tanquam unâ duntaxat dimensione constantes, cum duæ signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse æquationem, in qua g sit æqualis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Quâ æquatione denuo quadratâ, sublatum item erit signum radicale ipsius g. Atque ita facile est intelligere, quâlibet quadratione unum signum radicale tolli.

Majoris perspicuitatis ergo addatur sequens operatio, existente $n \infty e + g + h + k$, ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio $nn \infty ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$. Brevitatis autem causâ, pro $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$ scribatur pp; cum hæ quantitates signo radicali careant; & fit $pp \infty eg + eh + ek + gh + gk + hk$, sive $e \infty \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$. Unde quadrando rursus utramque partem invenitur:

$$ee \infty \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk}{gg + hh + kk + 2gh + 2gk + 2hk},$$

seu

$$p^4 + gghh + \overline{ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk} + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk - gg - hh - kk - 2gh - 2gk - 2hk \text{ in } ee \infty 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$\begin{array}{r} p^4 + gghh + ggkk + hhkk \overline{- gg - hh - k}k \text{ in } \overline{ee} \infty q^4 \\ + 2kk - 2pp - 2ee \infty rr \\ + 2hh - 2pp - 2ee \infty ss \\ + 2gg - 2pp - 2ee \infty tt, \end{array}$$

erit-

eritque $q^4 + rrgh + ssgk + tthk \infty 0$

$$\frac{q^4 + tthk}{rrh + ssk} \infty \div g$$

$$\frac{q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk}{r^4hh + s^4kk + 2rrsshk} \infty gg$$

$$q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk - \overline{r^4hh - s^4kk - 2rrsshk} \text{ in } gg \infty 0.$$

Supponatur rursus, brevitatis causâ,

$$q^8 + t^4hhkk - r^4hhgg - s^4kkgg \infty v^8,$$

$$\& \; 2q^4tt - 2rrssgg \infty w^6:$$

fietque $v^8 + w^6hk \infty 0$

$$v^8 \infty - w^6hk$$

& invenietur $v^{16} \infty w^{12}hhkk$. Quæ æquatio ab omnibus signis radicalibus liberata est.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis superioris $n \infty e + g + h$, &c. designare quantitatem signo radicali $\sqrt{C}$. adfectam. In hac igitur si loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evanescet signum radicale ipsius n, & unaquæque reliquarum literarum, e, g, h, &c. acquiret 1, 2, aut 3 dimensiones. In quantum autem tres dimensiones habent, in tantum carent etiam signo radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua e non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce terminos per e, obtinebitur æquatio, in qua e præter 1, 2, & 3 dimensiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac proinde ipsa e in hac æquatione etiam non nisi 1 & 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si ope hujus æquationis quæratur valor ipsius ee, isque in locum ee præcedentis substituatur, obtinebitur æquatio in qua e unam tantùm dimensionem habebit, atque ideo inveniri poterit e æqualis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quæ æquatio, si deinde cubetur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius e prorsus evanescet. vel potest rursum per e multiplicari, & valor ee de novo inveniri, qui iterum, ut antea, positus loco ee, habes valorem ipsius e alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in quâ $\sqrt{}$ cc^{am}. ipsius

ipſius e non reperies. Atque ſic omnia alia ſigna radicalia ex æquatione tolli poſſunt; quod facillimè perſpicitur, ſi tantùm advertamus, quòd, verbi gratiâ, $g, gg, g^4, g^5 g^7, g^8, g^{10}, g^{11}, g^{13}, g^{14}$, &c. ſolummodo habendæ ſint pro g, gg, cum g^3 ſignum radicale deponat. Quæ ut magis perſpicua evadant, ſequentem operationem adjicere viſum fuit.

Sit ex. gr. $n \infty e + g$

$$n^3 \infty e^3 + 3eeg + 3egg + g^3$$

$$n^3 - e^3 - g^3 \infty 3eeg + 3egg.$$

Eſto jam, brevitatis causâ, $n^3 - e^3 - g^3 \infty f^3$, quoniam ipſæ Aſymmetriâ carent, fietque $f^3 \infty 3eeg + 3egg$

$$f^3 e \infty 3e^3 g + 3eegg$$

$$\& \ \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} \infty 3eeg.$$

Invento valore ipſius $3eeg$ in ejus locum in æquatione præcedente ſubrogato, habebitur:

$$f^3 \infty \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} + 3egg$$

$$f^3 g \infty f^3 e - 3e^3 g + 3eg^3$$

$$f^3 g + 3e^3 g \infty f^3 e + 3eg^3$$

$$\frac{f^3 g + 3e^3 g}{f^3 + 3g^3} \infty e.$$

Deniqueponatur, brevitatis causâ, $f^3 + 3e^3 \infty p^3$, & $f^3 + 3g^3 \infty q^3$, cum ſingulæ ſignum radicale deponant,

eritque $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$

& $\frac{p^9 g^3}{q^9} \infty e^3$. Quæ æquatio ab Aſymmetria libera eſt. Vel hoc modo: multiplicetur $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$ per e, erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \infty ee$; & quoniam inventa eſt $f^3 \infty 3gee + 3gge$, ſeu, $\frac{f^3 - 3gge}{3g} \infty ee$

erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \infty \frac{f^3 - 3gge}{3g}$

& $3ggp^3 e \infty q^3 f^3 - 3q^3 gge$

ergo $e \infty \frac{q^3 f^3}{3ggp^3 + 3q^3 gg} \infty \frac{p^3 g}{q^3}$

& $q^6 f^3 \infty 3g^3 p^6 + 3g^3 p^3 q^3$. Quæ æquatio itidem ab omni ſigno radicali libera eſt.

Pari

Pari ratione tolli quoque possunt signa quævis altiora, sive illa ejusdem, sive diversæ dimensionis sint. Sed notandum est, quòd signa hæc, sive ipsa cognitis, sive incognitis quantitatibus præfigantur, per hunc modum semper quidem tolli possint, sed eum sæpissime non esse brevissimum, quando scilicet signa radicalia ad quantitates cognitas pertinent; quemadmodum pag. 75 Geometriæ cernere licet, ubi constat, quædam signa tolli posse multiplicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem, quo opere ipsa in aliam æquationem transmutatur, æquè multas dimensiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum supra allatum exemplum specimen erit: hæc enim æquatio $f^3 \propto 3gee + 3gge$ divisa per n ab una parte, & per $e + g$ (quæ æqualis est n,) ab altera parte, dat $\frac{f^3}{n} \propto 3ge$, cujus partes cubicè multiplicatæ dabunt $\frac{f^9}{n^3} \propto 27g^3e^3$, æquationem, in qua nullum signum radicale invenitur: Sed quoniam proposui tantummodo hîc generalem modum indicare, quo semper omnia signa radicalia tolli queant, & non compendia, quibus in multis casibus faciliùs eo pervenire posses, monstrare; ideò huic rei finem imponam, & ad Regulas Reductionum revertar.

X. REGULA.

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita considerari potest) duos vel plures æquales habet valores.

Primò si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant; multiplico eam per Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam: nimirum, 1^mum terminum æquationis per 1^mum terminum progressionis, 2^dum terminum æquationis per 2^dum terminum progressionis, & sic deinceps; & Productum, quod inde fit, erit $\propto$ 0. Deinde, cum sic duas habeam æquationes,

quæro, per Methodum superiùs explicatam, maximum earum communem divisorem; atque hujus ope æquationem Propositam toties divido, quoties id fieri potest.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio $x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$, in qua duæ sunt æquales radices. Multiplico ergo ipsam per Arithmeticam Progressionem qualemcunque, hoc est, cujus incrementum vel decrementum sit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus sit vel 0, vel +, vel — quam 0: Ita ut semper ejus ope talis terminus æquationis tolli possit, qualem quis voluerit, collocando tantùm sub eo 0.

Vt si, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$
per hanc progressionem $3. \quad 2. \quad 1. \quad 0$
fietque $3x^3 - 8xx + 5x \; * \; \propto 0.$

Maxima autem communis divisor hujus & Propositæ æquationis est $x - 1 \propto 0$, per quam Proposita bis dividi potest; ita ut ejusdem radices sint 1, 1, & 2.

Sic si cupiam 1[mum] æquationis terminum auferre, multiplicatio institui potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$
per hanc progressionem $0. \quad 1. \quad 2. \quad 3.$
& fit $* \; - 4xx + 10x - 6 \propto 0.$

Cujus quidem ac Propositæ æquationis maximus communis divisor, ut antea, est $x - 1 \propto 0$.

Similiter si 2[dum] terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri potest, hoc pacto: $x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$
$+1. \quad 0. \quad -1. \quad -2$
& prodibit $x^3 \quad * \quad - 5x + 4 \propto 0.$

Cujus item & Propositæ maximus communis divisor est $x - 1 \propto 0$.

Vbi notandum, non necessarium esse, semper uti Progressione cujus excessus sit 1, quanquam ea communiter sit optima.

Cæterùm notandum, inter omnes has diversas operationes, quamvis eundem communem divisorem maximum exhibeant, tamen alias aliis sæpe esse præferendas, quandoquidem unius termini destructione sæpenumero multò faciliùs ad finem pervenitur

quàm

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc divisorem immediatè ex Proposita æquatione & aliqua hujusmodi Progressione genita investigare: cum duæ ex his eligi possint, quarum beneficio eum invenire liceat. Vt sumendo, verbi gratiâ, $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $-4xx + 10x - 6 \infty 0$, vel $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$, vel $-4xx + 10x - 6 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$. Et sæpe etiam longè compendiosiùs est, duo hujusmodi producta sibi eligere, ac deinde illorum communem divisorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Propositâ. Quæ quidem omnia usus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Proposito procedo: cum perinde sit, sive æquatio numerica, sive literalis fuerit, & sive fractiones aut surdas quantitates includat, sive non; modò incognita quantitas inter surdas non contineatur: ita ut superfluum sit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem transeo.

2dò. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progressionem, ut antea; eritque Productum $\infty 0$: Hoc Productum rursus multiplico per Arithmeticam Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam $\infty 0$. Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; & ita semper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Exempli gratiâ, detur hæc æquatio $x^4 * - 6xx + 8x - 3 \infty 0$, habens 3 æquales radices.

Primò multiplico eam per $0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4$
& fit $-12xx + 24x - 12 \infty 0$.
Hoc productum iterum multiplico per $0.\ 1.\ 2$
& provenit $24x - 24 \infty 0$.
eritque communis divisor $x - 1 \infty 0$,

Ita ut Proposita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, & -3. Et sic de aliis omnibus.

Quod verò usum hujus Methodi concernit, is tantus est, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibusvis extremis, ut, quamvis se ad alia non extenderet, immensus tamen dici posset. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc sola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæsitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. quippe nihil aliud opùs est, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progressionem multiplicare: cum duæ hæ æquationes tùnc omnes Problematis conditiones sint comprehensuræ, ita ut ipsæ tantùm resolvendæ restent. Et notandum est, hoc sæpe beneficio solius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præstari posse; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à D[no] des Cartes in sua Geometria sunt allata, in quibus v & s incognitæ existunt & y quidem cognita, sed quæ ut incognita consideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehensæ, si illæ ipsæ æquationes sic determinentur, ut dicta quantitas y duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum est $yy \frac{+qr-2qv}{q-r} y \frac{+qvv-qss}{q-r} \propto 0$

Multiplico per meam Methodum per 2. 1. 0

$$\text{fit } 2yy + \frac{qr-2qv}{q-r} y \propto 0$$

$$\text{seu } 2qy - 2ry + qr \propto 2qv$$

$$\& \; y - \frac{ry}{q} + \tfrac{1}{2} r \propto v.$$

2[dum] exemplum est

$$\begin{array}{llllll} y^6 - 2by^5 & -2cdy^4 & +4bcdy^3 & -2bbcdyy & -2bccddy & +bbccdd \propto 0 \\ & +bb & -2ddv & +ccdd & & \\ & +dd & & -ddss & & \\ & & & +ddvv & & \end{array}$$

Mult. per $+4, +3, +2, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2$

eritque productum

$$\begin{array}{llllll} 4y^6 - 6by^5 & -4cdy^4 & +4bcdy^3 & * & +2bccddy & -2bbccdd \propto 0 \\ & +2bb & -2ddv & & & \\ & +2dd & & & & \end{array}$$

Divi-

Dividendo jam per $2\,ddy^3$ & transferendo v ad alteram partem, obtinebitur

$$\frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} \infty v.$$
$$+\frac{bby}{dd}$$
$$+y$$

3^{tium} autem exemplum ejuſdem eſt naturæ cum 1mo.

Vbi patet, in omnibus hiſce exemplis Quæſitum ex ſola Producta æquatione uno intuitu inveniri, y enim cognita eſt, atque v, quæ erat incognita ac ſola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò ſæpe etiam accidit, ut Quæſitum ex ſola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit ſi valorem quantitatis incognitæ s inveſtigare velimus. Quippe tunc valor ipſius v in prima æquatione in ejus locum ſubrogandus eſt, vel potiùs in alia æquatione, per aliam Progreſſionem productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1^{mam} Progreſſionem eſt ſublatus) tolli poteſt.

Exempli gratiâ, in 1mo exemplo multiplicatum fuit per 2, 1, 0, ac inde inventum $v \infty y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; Iam ſi multiplicetur

$$yy + \frac{qr - 2qv}{q - r}y + \frac{qvv - qss}{q - r} \infty 0$$

per $+1$, $\quad 0$, $\quad -1$:

obtinetur $yy \quad * \quad \dfrac{-qvv + qss}{q - r} \infty 0$

mult. per $q - r$.

div. per q. $\quad qyy - ryy \quad * \quad -qvv + qss \infty 0$

$$ss \infty -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

$$\text{fit } s \infty \sqrt{-yy + \frac{ryy}{q} + vv}.$$

Quocirca ſi in hac æquatione in locum vv ſubrogetur ejus valor, innoteſcet inde etiam quantitas s.

Eodem modo, multiplicando in 2do exemplo per hanc Progreſſionem 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, inveniri poteſt valor quantitatis s. Vbi ſi ſimiliter in locum vv, ejus valor ſubſtituatur, quantitas s inde innoteſcet.

Quòd ſi verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, eſſe talem, ut valor ipſius v per eandem æquationem ſolam ſine

ipsius s inclusione obtineri non possit; quemadmodum hîc valor ipsius s absque inclusione ipsius v ex producta æquatione inveniri nequit; potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps sunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, si habeatur hæc æquatio

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \ \infty \ 0,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 9aazz$$

in qua y & z sint incognitæ, & y ad z æquales radices determinari debeat: operationem instituo, ut sequitur.

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \ \infty \ 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 9aazz$$

Mult. per $\quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$

fit $\quad -12zzyy - 36z^3y + 36z^4 \ \infty \ 0$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 36aazz$$

div. per $12zz$. $\quad -yy - 3zy + 3zz \ \infty \ 0$
$$\qquad\qquad\qquad - 3aa$$

$$yy \ \infty - 3zy + 3zz.$$
$$\qquad\qquad - 3aa$$

Similiter multiplicetur Proposita

$$y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \ \infty \ 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 9aazz$$

per $\quad 4, 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0$

fit $4y^4 * - 12zzyy - 12z^3y \ * \ \infty \ 0$

div. per $4y$. $y^3 * - 3zzy - 3z^3 \ \infty \ 0.$

Substituendo jam valorem ipsius yy, supra inventum, in ejus locum, habebitur

$y^3 \ \infty - 3zyy + 3zzy$ seu $+ 9zzy - 9z^3$
$\qquad\qquad - 3aay \qquad\quad + 3zzy + 9aaz$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 3aay$

$-3zzy - 3z^3 \ \infty \ . \ . \ . \ - 3zzy - 3z^3$

summa $+ 9zzy - 12z^3 \ \infty \ 0$
$\qquad\quad - 3aay + 9aaz$

$$y \ \infty \ \frac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}.$$

Quo-

Quocirca ſubſtituendo rurſus hunc valorem ubique in locum y in hac æquatione $\begin{array}{l} yy \infty -3zy+3zz, \\ \qquad\qquad\quad -3aa \end{array}$ exurget inde alia æquatio, in quâ nulla incognita præterquam ſola z reperitur, quæque per eam porrò inveniri poteſt.

Denique, quicquid hîc de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus eſt intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac ſolâ, quòd incognita quantitas, vel quæ ut incognita conſideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc ſit determinanda: oportet ipſam primùm multiplicare per Arithmeticam Progreſſionem, & hoc productum rurſus eodem modo, & ſic deinceps, donec totidem æquationes habeantur, quot æquales radices. ut ſupra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantùm æquationes eodem modo reſolvendæ ſunt, ut in ſuperiori exemplo oſtenſum eſt, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non niſi una incognita quantitas reperiatur. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificioſa ac ingenioſa dicuntur, ad talem æquationem, in qua ſolummodo una hujuſmodi determinatio adhuc implenda eſt, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum ſolvi poſſe.

XI. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, ſive literales, ſive numerales, quæ produci poſſunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.

Brevitatis causâ, quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam ſuis ſignis + & —, vocabo p; 3^{tii} q; 4^{ti} r; 5^{ti} $ſ$; atque ſic deinceps: & $-p$, $-q$, $-ſ$, &c. eaſdem quantitates deſignabunt, ſed contrariis ſignis adfectas.

Ex.gr. in hac æquatione $\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 - 4bbxx + 6abbx - 4a^4 \infty 0, \\ \qquad\;\; +3b \qquad\qquad\quad +2aab \end{array}$

erit $-2a+3b \infty p$; $-4bb \infty q$; $+6abb+2aab \infty r$; $-4a^4 \infty s$; & $+2a-3b \infty -p$; $+4bb \infty -q$; &c.

1ma *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribusve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi hæ æquationes seu Divisores copulantur per voculam &; per *aliquam* verò, ubi disjunguntur per voculam *vel.*

$x^3, pxx, qx, r \infty 0$ ... per $x + p \infty 0$, & $x + \frac{r}{q} \infty 0$.

$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{s}{r} \infty 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \frac{s}{r} \infty 0$.

$x^4, px^3, qxx, *, s \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} \infty 0$.

$x^4, *, qxx, rx, s \infty 0$ per $x + \frac{s}{r} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \frac{t}{s} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$.

x^5;

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \propto 0$ per $x + \frac{t}{s} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \sqrt{C.\,\frac{t}{q}} \propto 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + \frac{t}{s} \propto 0$, & $x + \sqrt{C.\,r} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \propto 0$,

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* per utramque harum duarum
$x + \sqrt{C.\,\frac{v}{r}} \propto 0$,
$x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, *, v \propto 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \propto 0$	per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, *vel* $x + \sqrt{\mathrm{C.}\, r} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$,
	vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \propto 0$.
$x^6, *, qx^4, *, sxx, tx, v \propto 0$	per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \propto 0$.
$x^6, px^5, qx^4, *, *, *, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, & $x - \frac{v}{p^3} \propto 0$,
	& $x \pm \sqrt{-\frac{v}{ppq}} \propto 0$,
	& $x \pm \sqrt{\sqrt{-\frac{v}{q}}} \propto 0$.
$x6, *, qx^4, rx^3, *, *, v \propto 0$	per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, & $x - \frac{v}{qr} \propto 0$,
	& $x + \sqrt{\mathrm{C.}\, \frac{v}{r}} \propto 0$.
$x^6, *, *, rx^3, sxx, *, v \propto 0$	per $x - \frac{rs}{v} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$,
	& $x + \sqrt{\mathrm{C.}\, r} \propto 0$.
$x^6, *, *, *, sxx, tx, v \propto 0$	per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x - \frac{st^3}{v^3} \propto 0$,
	& $x \pm \frac{t}{v} \sqrt{-s} \propto 0$,
	& $x - \sqrt{\mathrm{C.}\, \frac{st}{v}} \propto 0$,
	& $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, & $x + \sqrt{\mathrm{C.}\, \frac{v}{r}} \propto 0$,
	& $x + \frac{v}{ppr} \propto 0$.
$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \propto 0$	per $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.
$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \propto 0$	per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x + \sqrt{\mathrm{C.}\, r} \propto 0$.
$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \propto 0$	per $x + p \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \propto 0$.

$x^6,$

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \frac{v}{t} \propto 0$.

2ᵈᵃ *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimenſiones habens, produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit duarum vel plurium dimenſionum, ac duorum tantùm terminorum; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem ſibi adjunctam.

1ᵐᵒ. *Per* $xx \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\propto 0$.

$x^3, pxx, qx, r \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, (& $x + p \propto 0$.)

$x^4, px^3, qxx, rx, s \propto 0$ per $xx + \frac{r}{p} \propto 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ per $xx + \frac{r}{p} \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$.

$x^4, *, qxx, *, s \propto 0$ per $xx + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$, & $xx + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$.

$x^4, *, *, *, s \propto 0$ per $xx + \sqrt{-s} \propto 0$, & $xx - \sqrt{-s} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx + \frac{t}{r} \propto 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{t}{r} \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$.

 x^5,

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \propto o$ per $xx + \frac{t}{r} \propto o$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto o$ per $xx \pm \sqrt{-s} \propto o$, & $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto o$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \propto o$ per $xx \pm \sqrt{-s} \propto o$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \propto o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto o$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto o$, & $xx + \sqrt{C.v} \propto o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{p} \propto o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{p} \propto o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{p} \propto o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \propto o$ per $xx + \frac{r}{p} \propto o$, & $xx + \sqrt{C.v} \propto o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{t}{r} \propto o$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{t}{r} \propto o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{t}{r} \propto o$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \propto o$ per $xx + \frac{t}{r} \propto o$, & $xx + \sqrt{C.v} \propto o$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto o$.

x^5,

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty o$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty o$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty o$, & $xx + \sqrt{C.v} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty o$ per $xx + y \infty o$, existente $y^3 - qyy + sy - v \infty o$.

$x^6, *, *, *, sxx, *, v \infty o$ per $xx + y \infty o$, existente $y^3 * + sy - v \infty o$.

$x^6, *, qx^4, *, *, *, v \infty o$ per $xx + y \infty o$, existente $y^3 - qyy * - v \infty o$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \infty o$ per $xx + \sqrt{C.v} \infty o$.

2do. *Per $x^3 \pm$ quantitate aliquâ cognitâ ∞o.*

$x^4, px^3, *, rx, s \infty o$ per $x^3 + r \infty o$, & $x^3 + \frac{s}{p} \infty o$ (& $x + p \infty o$)

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty o$ per $x^3 + r \infty o$, $x^3 + \frac{t}{p} \infty o$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty o$ per $x^3 + r \infty o$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$, (& $xx + q \infty o$)

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty o$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty o$ $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$, & $x^3 + \frac{1}{2} r \pm \sqrt{\frac{1}{4} rr - v} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty o$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty o$, $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \infty o$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty o$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty o$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \infty o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty o$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty o$, & $x^3 + \frac{1}{2} r \pm \sqrt{\frac{1}{4} rr - v} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \infty o$ per $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty o$ per $x^3 + \frac{t}{q} \infty o$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty o$.

$x^6, *, *, rx^3, *, *, v \infty o$ per $x^3 + \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty o$, & $x^3 + \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty o$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \infty o$ per $x^3 + \sqrt{-v} \infty o$, & $x^3 - \sqrt{-v} \infty o$.

3tiò. *Per $x^4 \pm$ quantitate aliquâ cognitâ* ∞o.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty o$ per $x^4 + s \infty o$, & $x^4 + \frac{t}{p} \infty o$, (& $x + p \infty o$.)

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty o$ per $x^4 + s \infty o$, $x^4 + \frac{t}{p}$ & $x^4 + \frac{v}{q} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty o$ per $x^4 + s \infty o$, & $x^4 + \frac{v}{q} \infty o$ (& $xx + q \infty o$.)

4tò. *Per $x^5 \pm$ quantitate aliquâ cognitâ* ∞o.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty o$ per $x^5 + t \infty o$, & $x^5 + \frac{v}{p} \infty o$, (& $x + p \infty o$.)

3tia *Pars.*

Si aliqua æquatio 5 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum ∞o, altera verò aliquem terminum ∞o; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi vocula &; per *aliquam*, ubi *vel* invenitur: ut antea.

Quan-

Quantitatem cognitam 2[di] termini æquationum sequentium quadratarum, adfectam suis signis + & —, brevitatis causâ, vocabo y, & ultimum terminum z.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, s \propto o$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{te} + \frac{t}{p}} \propto o$,

vel per $xx, + \frac{1}{2}p + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}\square^{te} - q}$

in $x, + \frac{yt}{s} \propto o$,

vel per $x^3 + r \propto o$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \propto o$ per $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \propto o$,

vel per $xx, + p + \frac{t}{s}$ in $x, + \frac{yt}{s} \propto o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \propto o$ per $xx + px + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \propto o$,

vel per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto o$ per $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \propto o$,

vel per utramque harum duarum
$\begin{cases} xx, + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{y.t}{s} \propto o, \\ xx, \pm \frac{s}{t}\sqrt{s} \text{ in } x, \pm \sqrt{s} \propto o. \end{cases}$

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \propto o$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{te} + \frac{t}{p}} \propto o$,

& per $xx + px + \frac{t}{2r} \pm \sqrt{\frac{tt}{4rr} - \frac{ppt}{r}} \propto o$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \propto o$ per $xx + px + \frac{1}{2}pp \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^4 + pr} \propto o$,

& per $xx + px + \sqrt{C.\,pt} \propto o$,

& per $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \propto o$ per $xx + px + pp \propto o$,

& per $xx + px + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \propto o$.

$x^5, px^4, *, *, *, t \propto o$ per $xx + px + pp \propto o$,

& per $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \propto o$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \propto o$ per $xx, + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \propto o$.

x^5,

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto o$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto o$.

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \propto o$ per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto o$,

& per $xx, \pm \sqrt{\frac{s}{z}}$ in $x, + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto o$,

& per $xx, + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \propto o$,

& per $xx + x\sqrt{C.\frac{ss}{t}} + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto o$.

$x^5, *, *, *, sx, t \propto o$ per $xx, \pm \frac{s}{t}\sqrt{s}$ in $x, \pm \sqrt{s} \propto o$,

& per $xx, \pm \sqrt{\sqrt{s}}$ in $x, \pm \sqrt{s} \propto o$,

& per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto o$,

& per $xx, + \sqrt{C.\frac{ss}{t}}$ in $x, + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto o$,

& per $xx, + \sqrt{\beta.t}$ in $x, + \frac{tt}{ss} \propto o$.

Ad 1[mam] & 3[tiam] Partem annotandum venit, ſi non conſtet an Propoſita æquatio ex duabus aliis, requiſitas conditiones habentibus, produci poſſit, quòd id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotieſcunque enim diviſores, qui per voculam & copulantur, inter ſe non ſecundùm omnes terminos conveniant, concludendum eſt, Propoſitam æquationem ita produci non poſſe, adeò ut eo in caſu diviſio irrita foret. Exempli gratiâ, ſi Proponatur æquatio $x^6, *, *, *, -xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{3} \propto o$, quæ hujus eſt formulæ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \propto o$, ea diviſibilis erit ſecundùm 1[mam] Partem, per $x + \frac{v}{t} \propto o$, & per $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto o$; & per $x \pm \frac{t}{v}\sqrt{-s} \propto o$; & per $x - \sqrt{C.\frac{st}{v}} \propto o$; & per $x - \frac{st^3}{v^3} \propto o$, ſi produci poſſit *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit unius dimenſionis, altera verò uno pluribuſve terminis careat.* Vt autem ſciatur, utrum hoc fieri queat, non opùs eſt id diviſione per aliquem ex diviſoribus explorare, cum hîc duo diviſores reperiantur inter ſe non convenientes: nimirum, $x + \frac{v}{t} \propto o$, & $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto o$, nam $\frac{v}{t}$ rationalem, & $\sqrt{\sqrt{-s}}$ irrationalem numerum deſignat. Atque cum indiviſibilitas etiam

ſæpe

ſæpe uno intuitu ex variis ſignis conſtet, ut, ex. gr. ſi loco $-\sqrt{3}$ habuiſſemus $+\sqrt{3}$, quo caſu $\sqrt{Q.}$ ex $-s$ extrahi non potuiſſet; Poterimus interdum operoſas aliquot multiplicationes & diviſiones, quæ alioquin eſſent faciendæ, inſuper habere. Majoris perſpicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Diviſores æquationis $x^5, *, *, *, sx, t \infty 0$ ſunt, ſecundùm 3^{tiam} Partem, $xx \; 8 \; \frac{s}{t} \sqrt{s}$ in x, $8 \sqrt{s} \infty 0$; $xx \; 8 \sqrt{\sqrt{s}}$ in x, $8 \sqrt{s} \infty 0$; $xx + \frac{t}{s} x + \frac{tt}{ss} \infty 0$; $xx + \sqrt{C.}\frac{ss}{t}$ in $x + \sqrt{C.}\frac{tt}{s} \infty 0$; & $xx + \sqrt{\beta.t}$ in $x + \frac{tt}{ss} \infty 0$: ſi jam comperiatur $8 \; \frac{s}{t} \sqrt{s}$ non eſſe $\infty \sqrt{\sqrt{s}}$, vel $\infty \frac{t}{s}$ vel $\infty \sqrt{C.}\frac{ss}{t}$, vel $\infty \sqrt{\beta.\,t}$, quæ ſunt quantitates cognitæ 2^{di} termini; vel ultimos terminos $8 \sqrt{s}$, & $+\frac{tt}{ss}$, &c. non inter ſe convenire; indicio eſſet æquationem Propoſitam produci non poſſe *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habet duas dimenſiones, & nullum terminum $\infty 0$, altera verò aliquem terminum $\infty 0$.*

4ta *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimenſionum produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimenſiones, & nullum terminum $\infty 0$; altera verò unum, pluresve terminos $\infty 0$; erit ea diviſibilis per $xx + yx + z \infty 0$, cujus y & z valores per ſequentes æquationes ac ſequenti modo ſunt inveniendi.

Æquationem Propoſitam, ſive in ea aliquis terminus deficiat, ſive non, ſic deſignabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2^{di} termini, vel 0, ſi is deficiat; q quantitatem cognitam 3^{tii} termini, vel 0, ſi is deſit; r 4^{ti} termini, &c.

A

$$\begin{array}{llll} zz - 2qz & + ppq \infty 0 & zz - \frac{t}{p}z + 2v \infty 0 & y \infty p \\ \quad -pp & -rp & \quad -s & \\ \quad +\frac{r}{p} & +s & \quad +rp & \\ & -\frac{t}{p} & \quad -ppq & \\ \hline \quad 2 & & \quad \frac{r}{p} + pp & \end{array}$$

B

$$\begin{array}{lll} y^3 - pyy + qy - r \infty 0 & yy - \frac{qt}{v}y + \frac{tt}{v^3} \infty 0 & z \infty \frac{yv}{t} \\ \quad -\frac{2v}{t} + \frac{pv}{t} & \quad -p \quad + \frac{rt}{v} & \\ & \quad +\frac{rtt}{vv} & \\ & \quad -\frac{t^3 s}{v^3} & \\ \hline & \quad 2 & \end{array}$$

C

$$\begin{array}{ll} y^4 - \frac{q}{p}y^3 + 3qyy - \frac{s}{p}y + \frac{t}{p} \infty 0 & y^4 - \frac{t}{s}y^3 + ppyy - 2pqy + qq \infty 0 \\ \quad -2p \quad +pp \quad -2pq + qq & \quad -2p \quad + \frac{tp}{s} \quad - \frac{tq}{s} \quad - \frac{vq}{s} \\ \quad \quad -\frac{qq}{p} - \frac{rq}{p} & \quad \quad +2q \quad + \frac{vp}{s} \\ \quad \quad +r & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -\frac{t}{s}y^3 + \frac{tp}{s}yy - \frac{tq}{s}y - \frac{vq}{s} \infty 0 & z \infty -py + yy + q \\ +\frac{q}{p} \quad -q \quad + \frac{vp}{s} - \frac{t}{p} & \\ \quad \quad + \frac{s}{p} + \frac{rq}{p} & \\ \quad \quad + \frac{qq}{p} & \\ \quad \quad -r & \end{array}$$

D

$$\begin{array}{ll} + qy^3 {}^{*} + sy - t \infty 0 & + sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs \infty 0 \\ \quad + qq + rq & \quad \quad \quad \quad -vq \\ & \quad \quad \quad z \infty yy + q \end{array}$$

e	f	g
$y \infty p$	$y \infty p$	$y \infty \frac{t}{s}$
$z \infty q$	$z \infty q - \frac{r}{p} \infty \frac{vp}{t}$	$z \infty \frac{v}{s}$.

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando est *p* ∞ o	… per aliquam harum	B, D, g
q	— — —	A, B, C, f, g
r	— — —	A, B, C
ſ	— — —	A, B, C, e, f
t	— — —	A, C, e
p, *q*	— — —	B, D, g
p, *r*	— — —	B, D
p, *ſ*	— — —	B, D
p, *t*	— — —	D
q, *r*	— — —	A, B, C
q, *ſ*	— — —	A, B, C, f
q, *t*	— — —	A, C
r, *ſ*	— — —	A, B, C
r, *t*	— — —	A, C
ſ, *t*	— — —	A, C, e
p, *q*, *r*	— — —	B, D
p, *q*, *ſ*	— — —	B
p, *r*, *ſ*	— — —	B, D
p, *r*, *t*	— — —	D
q, *r*, *ſ*	— — —	A, B, C
q, *r*, *t*	— — —	A, C
q, *ſ*, *t*	— — —	A
r, *ſ*, *t*	— — —	A C
p, *q*, *r*, *ſ*	— — —	B
p, *q*, *ſ*, *t*	— erit $y^6 ** + ry^3 ** + v$ ∞ o, & z ∞ yy	
q, *r*, *ſ*, *t*	— — —	A
p, *q*, *r*, *ſ*, *t*	— erit $y^6 ***** + v$ ∞ o, & z ∞ yy.	

1. Pro A, vel B, vel C aſſumere licet, vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius y, vel z; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut ſuperiùs oſtenſum eſt, earum communem diviſorem, qui, aut unius, aut plurium futurus eſt dimenſionum. ſi unius, habebitur quæſitus valor ipſius y vel z; ſi plurium, eundem ex hoc communi diviſore inveſtigare oportet.

2. Si primò per capitales ſive majuſculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g, non ſunt neceſſariæ; ſed non vice verſâ.

Exempli gratiâ, proponatur

$$\begin{array}{cccccccccccc} x^6 & + & 2x^5 & - & 3x^4 & + & 7x^3 & - & 3xx & - & 13x & - 5 \infty 0. \\ & & p & & q & & r & & s & & t & v \end{array}$$

Cum nullus terminus hîc deficiat, examinanda eſt æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, ſi à minuſculis g, f, e incipiamus, ſi autem à capitalibus, erunt minuſculæ inſuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque ſumere licet æquationem

$$zz - \begin{array}{l} 2q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \end{array} z + \frac{\begin{array}{l} ppq \\ -rp \\ +s \\ -\frac{t}{p} \end{array}}{2} \infty 0,$$

vel

$$zz - \frac{t}{p} z + \frac{\begin{array}{l} 2v \\ -s \\ +rp \\ -ppq \end{array}}{\frac{r}{p} + pp} \infty 0,$$

vel utramque.

Si primam ſumamus, obtinebitur pro ipſa (quoniam $p \infty 2$, $q \infty -3$, $r \infty 7$, $s \infty -3$, $t \infty -13$, & $v \infty -5$) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} \infty 0$; ſin alteram, obtinebitur $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 10 \infty 0$, quarum communis diviſor eſt $z + 5 \infty 0$. Quoniam autem

$y \infty p$

$y \propto p \propto 2$, dividendum est per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx + 2x - 5 \propto 0$, invenieturque pro quotiente $x^4 * + 2xx + 3x + 1 \propto 0$. Et manifestum est, nos etiam alterutra tantùm duarum illarum æquationum uti potuisse. Facilior itaque via eligenda erit: non enim semper illa per communem divisorem brevior est, neque semper longior; verùm hanc habet prærogativam, quæ sanè non parva est, quòd inutiles radices abscindat. Quemadmodum sequenti exemplo clariùs patebit.

Esto æquatio Proposita $x^6 * - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 1 \propto 0$. Quoniam hîc p est $\propto 0$, reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, invenietur pro 1ma

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + qy - r \propto 0, \\ \quad\;\; - \frac{2v}{t} + \frac{pv}{t} \end{array}$$

hæc æquatio $y^3 - \frac{2}{3}yy - 2y - 3 \propto 0$; & pro 2da

$$\begin{array}{l} yy - \frac{qt}{v}y + \frac{tt}{v^3} \propto 0, \\ \qquad\quad\;\; - p \quad + \frac{rt}{v} \\ \qquad\quad\;\; + \frac{rtt}{vv} \\ \qquad\quad\;\; - \frac{tts}{v^3} \\ \hline \qquad\qquad 2 \end{array}$$

hæc $yy + 230y - 305 \propto 0$: est enim in hoc exemplo $q \propto -2$, $r \propto 3$, $s \propto -3$, $t \propto -5$, & $v \propto -1$. Unde, quærendo earum communem divisorem, comperietur nullum dari, ac proinde divisionem per B fieri non posse. Hinc transeo ad D, ubi pro 1ma æquatione

$$\begin{array}{l} qy^3 * + sy - t \propto 0 \\ \qquad\quad + qq + rq \end{array}$$

invenio $-2y^3 * + 1y - 1 \propto 0$, & pro 2da

$$\begin{array}{l} sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs \propto 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - vq \end{array}$$

invenio $-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 14 \propto 0$. Quarum æquationum divisor communis est $y + 1 \propto 0$; adeoque $z \propto yy + q \propto -1$; ita ut divisio sit facienda per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx - 1x - 1$, eritque quotiens $x^4 + 1x^3 * + 4x + 1 \propto 0$.

Ubi notandum, modum hunc quærendi communem divisorem in altioribus præsertim æquationibus permagni esse usus, non autem tanti usus, cùm æquationes, quarum divisor communis investigandus est, solummodo sunt 2 dimensionum, aut etiam trium, quoniam tum divisores faciles sunt inventu. Ut in

LII 3 æqua-

æquatione superiori $-2y^3 * +1y - 1 \propto 0$, ubi protinus apparet y esse $\propto -1$, adeoque si ipsa dividatur per $y + 1 \propto 0$, obtinebitur $-2yy + 2y - 1 \propto 0$. Cujus radices quoniam sunt impossibiles, solùm superest $y \propto -1$; adeò ut divisio æquationis Propositæ tentanda sit per $xx - 1x - 1 \propto 0$.

Sic & si habeatur æquatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \propto 0$, comperietur ejus divisionem fieri posse beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur $2yy - 5y + 3 \propto 0$, & pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \propto 0$, & pro communi divisore $y - 1 \propto 0$. Et quoniam z est $\propto \frac{yv}{t} \propto 1$, erit $xx + yx + z \propto 0 \propto xx + 1x + 1 \propto 0$. Per quam igitur si Proposita æquatio dividatur, fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx * + 1 \propto 0$.

Si autem detur æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 * + 1xx + 14x + 2 \propto 0$, in qua r est 0, oportet ipsam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis

$$\begin{array}{l} zz - 2qz + ppq \propto 0 \\ \quad\;\; - pp \quad - rp \\ \quad\;\; + \frac{r}{p} \quad\; + s \\ \quad\quad\quad\quad\; - \frac{t}{p} \\ \hline \quad\quad\quad\; 2 \end{array}$$

invenitur $zz - 4z + 1 \propto 0$; & loco æquationis

$$\begin{array}{l} zz - \frac{t}{p}z + 2v \propto 0 \\ \quad\;\; - s \\ \quad\;\; + rp \\ \quad\;\; - ppq \\ \hline \quad\;\; \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

invenitur eadem $zz - 4z + 1 \propto 0$. Ex qua, quia utriusque communis divisor est, radices invenire oportet, quæ sunt $z \propto 2 + \sqrt{3}$, & $z \propto 2 - \sqrt{3}$. Vnde cum y sit $\propto p$, hoc est, 2, pro $xx + yx + z \propto 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \propto 0$, & $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \propto 0$. Per quas igitur si Proposita æquatio divisa fuerit, comperietur ipsam produci posse multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \propto 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \propto 0$, & $xx - 2x + 2 \propto 0$.

5^a Pars.

5ª *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit multiplicatione duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, in quarum alterutra unus pluresve termini sint $\propto 0$; erit ipsa divisibilis vel per æquationem tantùm 2 terminorum, juxta 2ᵈᵃᵐ partem, vel per æquationem $x^3 + yxx + zx + w \propto 0$, in qua tantùm alterutra vel y vel z est $\propto 0$; quarumque y, z, & w valores inveniuntur per sequentes æquationes.

Æquationem Propositam, sive in ea aliquis terminus deficiat, sive non, sic designabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2ᵈⁱ termini, vel o, si is deficiat; q quantitatem cognitam 3ᵗⁱⁱ termini, vel o, si is desit; r quarti termini, &c.

$$\text{A}\quad \begin{array}{llll} 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq \propto 0 \\ & +pp & +2s\ +tp & \\ & & +qq & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} +qqzz & +4sq\ z & -4ss \propto 0 \\ +p^4 & -3pqr & -4ppv \\ -4s & -2pps & +4psr \\ +2pr & +2tp & +sqq \\ & -q^3 & -ptq \\ & -rp^3 & -sqpp \\ & +qqpp & +tp^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} w \propto \frac{s+zz-qz}{p} \\ \\ \\ \\ y \propto 0. \end{array}$$

$$\text{B}\quad \begin{array}{l} y^4 - \frac{qt}{v}y^3 + \frac{pqt}{v}yy - \frac{st}{v}y - qq \propto 0 \\ \quad -p \qquad\qquad +qp - \frac{tt}{v} \\ \qquad\qquad\quad -\frac{qqt}{v} + \frac{rtq}{v} \end{array} \qquad \begin{array}{l} y^4 - 2py^3 + qyy - ry + pr \propto 0 \\ \quad +\frac{2v}{t} \quad +pp \quad -pq - s \\ \qquad\qquad -\frac{3pv}{t} + \frac{2qv}{t} - \frac{pqv}{t} \\ \qquad\qquad\qquad +\frac{ppv}{t} \end{array}$$

$$w \propto \frac{t}{q - py + yy}$$

$$z \propto 0.$$

$$\text{C}\quad zz - qz + s \propto 0 \qquad ww - rw + v \propto 0 \qquad y \propto 0.$$

$$\text{D}\quad yy - py + q \propto 0 \qquad ww - rw + v \propto 0 \qquad z \propto 0.$$

$$\text{e}\quad z \propto q \qquad w \propto \frac{s}{p} \qquad y \propto 0.$$

$$\text{f}\quad y \propto p \qquad w \propto \frac{t}{q} \qquad z \propto 0.$$

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando est *p* ∞ o... per aliquam harum				C, B
q	—	—	—	A, B
r	—	—	—	A, B, e, f.
ſ	—	—	—	A, B
t	—	—	—	A, D
p, *q*	—	—	—	C, B
p, *r*	—	—	—	C, B
p, *ſ*	—	—	—	B
p, *t*	—	—	—	C, D
q, *r*	—	—	—	A, B
q, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*	—	—	—	A, B
r, *t*	—	—	—	A, D
ſ, *t*	—	—	—	A, D
p, *q*, *r*	—	—	—	C, B
p, *q*, *ſ*	—	—	—	B
p, *q*, *t*	—	—	—	C
p, *r*, *ſ*	—	—	—	B
p, *r*, *t*	—	—	—	C, D
p, *ſ*, *t*	—	—	—	D
q, *r*, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *r*, *t*	—	—	—	A
q, *ſ*, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*, *t*	—	—	—	A, D
p, *q*, *r*, *ſ*	—	—	—	B
q, *r*, *ſ*, *t*	—	—	—	A

1. Pro A vel B aſſumere licet vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius *y*, vel *z*; vel duas, eandem incogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem divisorem valores ipsius y vel z eodem modo quo in Parte 4ta dictum est.

2. Si primò per capitales A, B, C, D, examen fiat, tum examen per reliquas e & f superfluum habendum est, sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \infty 0.$$

Quoniam nulli termini desunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minusculis, ac primùm ab e, habebitur $z \infty q \infty 4$, & $w \infty \frac{s}{p} \infty 5$, adeoque prò $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, fiet $x^3 * + 4x + 5 \infty 0$. Cum verò Proposita æquatio per hanc dividi nequeat, transeo ad f, obtineoque $y \infty p \infty 1$; $w \infty \frac{t}{q} \infty \frac{11}{4}$; $z \infty 0$; & in locum $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtineo $x^3 + 1xx * + \frac{11}{4} \infty 0$. Et cum Proposita per hanc quoque non divisibilis existat, transeo ad A, & pro

$$\begin{array}{llll} 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq \infty 0 \\ & +pp & +2s & +tp \\ & & +qq & \end{array}$$

obtineo $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$, cujus radices sunt $+3$, $+1$, & $+1\frac{1}{2}$. Quia autem omnes hæ radices sunt rationales, ac æquatio Proposita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inservire. Unde explorandum tantùm restat per $z \infty 3$, & $z \infty 1$. Sumendo autem $z \infty 1$, reperitur divisionem fieri non posse, ac idcirco si sumatur $z \infty 3$, fiet $w \infty \frac{s + zz - qz}{p} \infty 2$. Quoniam verò y est $\infty 0$, pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtinebitur $x^3 * + 3x + 2 \infty 0$, per quam si divisio Propositæ tentetur, comperietur ipsam fieri posse, atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$. Sed loco 1^{mæ} æquationis juxta A sumere potuissemus 2^{dam}, unâ dimensione depressiorem, pro qua obtinuissemus $13zz - 60z + 63 \infty 0$. Quæ unam tantùm radicem rationalem absolutam admittit, quæ, ut supra, est $+3$.

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ semper, si per communem divisorem Quæsitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri potest radix alterutrius æquationis, si nempe ea facilis sit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

tio dictam radicem admittat: Quo sæpe nonnihil laboris abscindi potest.

Priusquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ sunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri possint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimensionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, sed quæ determinationem aliquam involvebant. Vt in 1ma Parte, ubi æquationi $x^6, px^5, qx^4, * sxx, tx, v \infty 0$, loco divisoris $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$, adjungere potuissem divisorem $x - \frac{v - qs}{ps - t} \infty 0$: quem, cum determinationem involvat, (siquidem $x + 3 \infty 0$, divisor æquationis $x^6 + 5x^5 + 6x^4 * + 5xx + 25x + 30 \infty 0$, per illum inveniri nequit:) omittendum duxi, præferendo ei alterum $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$; qui determinationi nulli obnoxius est.

Denique, usus hujus XI Regulæ se longè lateque extendit, quod nemo facilè negaverit, qui modò viderit, non necesse esse, vel fractiones, vel cognitas quantitates surdas priùs ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præsertim valde composita, & multarum dimensionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci possit, tantùm unam requiri, in qua unus pluresve termini deficiant, ut Reductio per has Regulas inveniatur.

SEQVENTES 12, 13, 14, 15 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, IN QVIBVS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIVNTVR.

XII. *REGVLA.*

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo Termino non contineatur*; si illa non nisi semel in æquatione extet, vel semel tantùm reperiatur secundùm eundem dimensionum numerum, (ut in Æquatione

$$\begin{array}{llllll} x & -2ax^3 & +aaxx & -2abbx & +aabb & \infty 0, \\ & -2c & +bb & -2acc & & \\ & & +4ac & & & \\ & & -dd & & & \end{array}$$

in

in qua $d\,d$ ſemel duntaxat reperitur, duas habens dimenſiones) æquatio ſemper indiviſibilis erit per x, aut $x\,x$, &c. $+$ vel $-$ quantitate quâvis cognitâ atque rationali.

XIII. *REGULA.*

Si pluries in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, ***quæ in ultimo termino non contineatur***; ſi illa ubique eodem ſigno $+$ vel $-$ ſit adfecta, ac per incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimenſiones habentem, multiplicata: æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per $x+$ vel $-$, vel per $x\,x$, x^3, &c. $-$ quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 + 4\,c\,x^3 - d\,d\,x\,x + 4\,b\,b\,c\,x + b^4 \infty\, 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2\,b\,b\,d \end{array}$$

in quâ c bis *tantùm* reperitur adfecta ſigno $+$, ac multiplicata per x unius & trium dimenſionum. aut hæc

$$\begin{array}{l} x^6 - a\,x^5 + c\,f\,x^4 - c^3\,x^3 - c^4\,x\,x - d\,d\,c\,c\,a\,x + c^3\,d^3 \infty\, 0, \\ \quad + b \qquad - d\,d \qquad - a\,d\,d \quad + d\,d\,f\!f \quad + d^3\,b\,b \end{array}$$

ubi a ter invenitur adfecta ubique ſigno $-$; aut b bis ſigno $+$; ac ducta utraque in x, ubique habentem dimenſiones impares: aut in quâ etiam f bis reperitur adfecta ſigno $+$, ac ducta in x, ubique pares dimenſiones habentem.

XIV. *REGULA.*

Si in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, ***quæ in nullo alio quàm in ultimo termino contineatur***; ſi ejus dimenſionum numerus ſit minor numero dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderato, (ut in hac

$$\begin{array}{l} x^6 - b\,b\,x^4 + b^3\,c\,x\,x + b\,c\,d^4, \infty\, 0, \\ \qquad\qquad - b\,b\,c\,c \quad + 2\,b\,d^5 \end{array}$$

in qua

d tantùm in ultimo termino continetur, habens ad summum 5, & *x* plures, nimirum 6 dimensiones) certum est illam æquationem per $x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ esse indivisibilem; Si ejus dimensionum numerus sit minor semisse numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, (ut in eodem exemplo, si loco ultimi termini $b\,c\,d^4 + 2b\,d^5$ ponatur $b\,c^3\,d\,d + 2\,b^5\,d$) certum est illam æquationem per $x\,x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ indivisibilem existere. Si ejus dimensionum numerus sit minor triente numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, certum est illam æquationem per $x^3 +$ vel $-$ &c. non posse dividi. atque ita porrò in infinitum.

XV. *REGULA.*

Si in æquatione Proposita litera cognita reperiatur, quæ in ultimo termino non continetur, *atque ea divisibilis sit per* x, $x\,x$, x^3, *&c.* $+$ *vel* $-$ *aliquâ quantitate rationali & cognitâ; facile erit beneficio alterius æquationis dictum divisorem invenire.*

Vt in hac æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^5 - f x^4 & + b f & x^3 - 16\,b\,c\,d\,x\,x & + \frac{1}{2}\,b\,b\,c\,f\,x & - 8\,c\,c\,d\,b\,b \propto 0 \\ & + 1\frac{1}{2}\,b\,c & - \frac{1}{2}\,b\,c\,f & + \frac{1}{2}\,b\,b\,c\,c & \end{array}$$

in quâ *f* in ultimo termino non continetur, *opùs tantùm est, ut omnes quantitates, in quibus f æquè multas habet dimensiones nihilo æquales ponantur, atque porrò investigetur utriusque, inventæ scilicet atque Propositæ æquationis, communis divisor.* Quocirca posito $- f x^4 + b f x^3 - \frac{1}{2}\,b\,c\,f\,x\,x + \frac{1}{2}\,b\,b\,c\,f\,x \propto 0$, seu $- x^3 + b\,x\,x - \frac{1}{2}\,b\,c\,x + \frac{1}{2}\,b\,b\,c \propto 0$, invenitur, secundùm Methodum ante descriptam, pro earum communi divisore $x\,x + \frac{1}{2}\,b\,c \propto 0$.

Sic

Sic etiam si proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - a & x^3 + aa & xx + c^3 & x - bc^3 & \propto 0 \\ \;\;\; - b & \;\;\; + ab & \;\;\; - baa & + c^4 & \\ \;\;\; + c & \;\;\; - ac & \;\;\; + aac & & \end{array}$$

in qua a in ultimo termino non continetur; posito $-ax^3 + ab\,xx \propto 0$, erit $x - b + c \propto 0$.
$\qquad - ac$

Divisio itaque tentanda est per $x - b + c \propto 0$; quoniam nullus præter hunc communis divisor haberi potest. Eundem Divisorem obtinuissemus si quantitates omnes ubi a est duarum dimensionum posuissemus $\propto 0$. Notandum est in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opùs esse, ut literales Fractiones semper priùs ex æquationibus auferantur: Nam si contingat, his Fractionibus sublatis, literam, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantùm inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur; vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum necessaria non est.

SEQVENTES 16, 17, 18, 19 ET 20 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, VBI NEC SIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LITERALES VEL NVMERALES INVENIVNTVR.

Hucusque perinde est, an Propositæ æquationis omnia membra, sive terminorum partes separatæ per signum + vel — junctæ eundem habeant dimensionum numerum vel secus: In his sequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis considerabo, brevitatis causâ, ejusmodi tantùm æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimensionum; potest enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facilè in talem permutari, ut cuique notum est.

Quomodo omnia radicalia signa ex æquatione tolli possint, jam antea ostendi. Quomodò verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & satis à D^no^ des Cartes monstratum est in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis sequentibus divisores rationales ultimi Termini necessariò sciri debeant, præmittam

Modum inveniendi omnes rationales Divisores ultimi Termini surdis & Fractionibus carentis.

Vltimus Terminus æquationis Propositæ aut ex *uno* aut ex *pluribus Membris* seu quantitatibus, per + & — junctis constabit. Si *unius tantùm Membri* sit, notum est quâ ratione ipsius divisores inveniantur. Quòd si autem ex *pluribus Membris* constiterit, sæpenumero difficile est eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, considero seorsim ultimum Terminum æquationis Propositæ, supponendo ipsum ∞ o, atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus respectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 4ax^3 & + 2cc\,xx & - 4acc\,x & + c^4 & \infty\ 0 \\ & + 7aa & - 4aac & - 4a^4 & \\ & + 2ac & - 6a^3 & + 8a^3c & \\ & & & + 2ac^3 & \\ & & & + 3aacc & \end{array}$$

sumendo literam c pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \infty\ 0$.

Deinde inquiro per antecedentes vel sequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi possit; Si enim hoc fieri nequeat, manifestum est ultimum Terminum æquationis Propositæ nullos quoque divisores rationales admittere (nisi unitatem atque ipsum ultimum Terminum integrum inter divisores numerare velimus; sed hi in æquationibus literalibus, ubi omnes quantitates eundem dimensionum numerum habent, nullius usus sunt); Quòd si verò dividi possit, oportet rursus eodem modo quærere divisores hujus divisoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fi-

ctam

ctam æquationem dividere possunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ sunt quæsiti divisores ultimi Termini æquationis Propositæ.

Per præcedentes autem uti & per sequentes Regulas omnes divisores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus divisoribus ultimi Termini, ut plurimùm facillimo negotio inveniri poterunt, imo perpaucæ æquationes occurrunt, quarum divisores ultimi Termini non per sequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri possent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum divisores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulteriùs videndum est, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, ***unum an plura membra*** habeat. Si enim ***unum tantùm membrum*** habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus est $- 4\, a^4$, notum est quo pacto ejusdem divisores investigare liceat, possuntque deinde eorum ope per sequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta divisibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ, qui requirebantur.

Quòd si verò ultimus Terminus Fictæ æquationis ***plurium membrorum*** fuerit, tum rursus eundem, ut ante, supponerem ∞ o, ac iterùm agerem, quemadmodum jam dictum est, donec inveniatur æquatio, vel cujus rationales divisores per aliquam præcedentium, sive per 21 Regulam facillimè inveniuntur; vel cujus ultimus Terminus tantùm ***unius membri*** existit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæsitum obtineri potest, quoniam tunc per sequentes Regulas inveniri possunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus divisoribus ultimi Termini proximè ante-

antecedentis Fictæ æquationis possunt denuo per easdem Regulas, ope horum divisorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, sicque ulteriùs ascendendo obtinebuntur tandem divisores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propositæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, si proponantur inveniendi divisores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{lllll} x^4 \; * & -14aaxx & +32aacx & +a^4 & \infty\, 0, \\ & +4ac & +4acd & -10aacc & \\ & +2cc & -16add & -2accd & \\ & +4dd & & +4aadd & \\ & +\;dc & & +4ac^3 & \\ & & & +4a^3c & \\ & & & +dcaa & \\ & & & +24acdd & \\ & & & +4ccdd & \\ & & & +4cd^3 & \\ & & & +c^4 & \\ & & & +dc^3 & \end{array}$$

nimirum ope Regularum sequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Proposita dividi potest, detegentium beneficio divisorum ultimi Termini: suppono ejus ultimum Terminum ∞ o, atque unam ex ipsius literis considero ceu incognitam quantitatem, ut puta a, obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{llllll} a^4 & +4ca^3 & -10ccaa & -2ccda & +4ccdd & \infty\, 0. \\ & & +4dd & +4c^3 & +4cd^3 & \\ & & +dc & +24cdd & +c^4 & \\ & & & & +dc^3 & \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, suppono ipsum rursus, ut ante, ∞ o sumendoque c pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 + dc \; + 4ddcc + 4d^3c \infty 0.$$

Quæ divisa per c dat $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$, quæ est æquatio in qua ultimus Terminus $4d^3$ tantùm *unum Membrum* habet.

habet. Constat autem quo pacto divisores hujus ultimi termini inveniantur, qui, postquam cogniti erunt, inservire poterunt, ut eorundem ope per sequentes Regulas quærantur, æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$ dividentes, ac proinde etiam æquationes, quæ $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0$ dividere possunt, quæ quidem est ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{lllll} a^4 + 4ca^3 & - 10ccaa & - 2ccda & + 4ccdd & \infty 0. \\ & + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 & \\ & + dc & + 24cdd & + c^4 & \\ & & & + dc^3 & \end{array}$$

Inventis verò divisoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, possunt denuo per easdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipsam dividentes; quibus cognitis inventum est, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus sit Propositæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per solam sequentem XVII Regulam semper omnes divisores ultimi Termini inveniri posse: sed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas sequentes Regulas sæpe primo intuitu cernitur tales divisores non dari, si non dentur, & ii qui dantur sæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regulæ magno cum fructu adhiberi.

XVI. *REGULA.*

Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantùm Terminos habentes, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, sive literalis sive numeralis sit, dividi possit.

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus, aut etiam terminis Propositæ æquationis; atque juxta hanc suppositionem inveniatur valor ipsius x; vel sumatur tantùm aliquis valor pro x, ut libet. Deinde substituto hoc valore Ficto ipsius x, vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipsius x æquationis Propositæ: Si termini se mutuò de-

ſtruere reperiantur, erit Propoſita æquatio diviſibilis per $x -$ hoc Ficto valore $\propto 0$; ſi autem hi termini ſe mutuò non deſtruant, quærantur diviſores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis diſtinguatur, in poſterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque diviſore unius dimenſionis auferatur valor Fictus ipſius x, at ab unoquoque diviſore duarum dimenſionum auferatur ejuſdem valoris quadratum, & ſic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum conſentiant cum diviſoribus ultimi Termini æquationis Propoſitæ; ſi enim nulla eorum cum iis conſentiant, indicio eſt æquationem Propoſitam per aliam duos tantùm Terminos habentem, ſeu per x, aut xx, &c. $+$ vel $-$ quantitate quâvis cognitâ atque rationali non eſſe diviſibilem: Si verò aliqua conſentiant, oportet, facto unoquoque conſentiente $+ x$ earundem dimenſionum, $\propto 0$, explorare per quam harum æquationum æquatio Propoſita dividi poſſit; ſi enim per nullam ipſarum diviſibilis ſit, erit quoque Propoſita per x, aut xx, &c. $+$ vel $-$ quâvis quantitate cognitâ atque rationali indiviſibilis. Quæ quidem omnia ſequenti exemplo clariora evadent.

Vt ad inveſtigandos diviſores, ſi qui ſint, hujus æquationis $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix} -bb \\ +20aa \end{smallmatrix} x + 20abb \propto 0$, ſuppono $x^3 \propto 21axx$, vel $bbx \propto 20abb$, vel ad libitum quemlibet pro x valorem aſſumo, utputa a vel b: ſed aſſumamus $x^3 \propto 21axx$, ſive $x \propto 21a$. Deinde ſubrogando $21a$ ubique in locum x in æquatione Propoſita $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix} -bb \\ +20aa \end{smallmatrix} x + 20abb \propto 0$ (rejiciendo brevitatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta eſt conflata, cum ipſi, dum nihilo ſunt æquales poſiti, neceſſariò evaneſcant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $-21abb + \begin{smallmatrix} 21, \\ 20a^3 \end{smallmatrix}$

$20\,a^3 + 20\,abb$, vel $-abb + 21$, $20\,a^3$, quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus divisores hi quatuor existunt $+a$, & $-a$; $-bb + 21$, $20\,aa$, & $+bb - 21$, $20\,aa$. Porrò subducto hoc Ficto valore $21\,a$ ab utroque priorum; & ab utroque duorum sequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipsi duarum sunt dimensionum;) relinquentur $-20\,a$, $-22\,a$; $-bb - 21\,aa / bb - 41$, $21\,aa$. Quo peracto, si videatur num aliqua horum Reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini $+20\,abb$ æquationis Propositæ, comperietur solummodo $-20\,a$ consentire. Quocirca ad $-20\,a$ additâ x unius dimensionis, siquidem $-20\,a$ unius tantùm dimensionis existit, explorandum duntaxat restat num æquatio Proposita dividi possit per $x - 20\,a$. quod, si non contingat, erit ea per x, aut xx, $+$ vel $-$ quâvis aliâ quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis, quemadmodum quoque si nulli divisores congruentes reperti fuissent. at verò hæc æquatio dividi poterit per $x - 20\,a$, orieturque pro quotiente $xx - ax - bb \infty 0$.

Hîc autem quædam consideranda veniunt, quæ breviter saltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Proposita dividi possit, eâdem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cùm ipsi x affingitur aliquis valor, observandum est, eum brevitatis causâ ita fingi posse, ut ipso in locum x subrogato resultet inde tale quantitatum aggregatum seu *Fictus terminus*, cujus divisores faciles sint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri potest.

3. Sæpenùmero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ quærantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quæ restabant Reliqua, ex divisoribus Ficti Termini & ex assumpto valore ipsius x & xx facta, hæc erant quatuor $-20\,a$, $-22\,a$, $-bb - 21\,aa$, $+bb - 41$, $21\,aa$, quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi Termini $20\,abb$ æquationis Propositæ, *cum duo Membra habeant*, *atque hîc terminus tantùm unum.* deinde apparet etiam, quòd $22\,a$ divisor esse non possit ipsius $20\,abb$, *quoniam numerus* 22 *major est numero* 20; atque eapropter considerare tantùm oportet

tet — $20\,a$, ita ut solummodo inquirendum sit num ultimus Terminus $20\,abb$ divisibilis sit per — $20\,a$. Possumus quoque eodem modo, quando divisores ultimi Termini æquationis Propositæ cogniti sunt, invenire divisores omnes *Ficti Termini*, qui nobis inservire queunt, reliquis qui inutiles sunt prætermissis. Quin imò in multis casubus, præsertim cùm æquatio indivisibilis est, parcere possumus labori, qui in quærendis divisoribus tam ultimi Termini æquationis Propositæ quàm *Ficti Termini* esset impendendus, si modò ipsos inter se comparaverimus, quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis patescet.

4. Si fortè contingat ut divisores Congruentes multi adhuc numero existant, ita ut etiamnum nimis laboriosum foret omnibus istis divisoribus divisionem æquationis Propositæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipsi x alium valorem assignando rursus operari, &, ut ante, *Reliqua* (quæ singulis divisoribus hujus ultimi Ficti termini, — ultimò ipsius x, aut $x\,x$, &c. fictis valoribus sunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, si qui sint, eligere, si verò nulli reperiantur, argumentum est æquationem per x, aut $x\,x$, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali esse indivisibilem. Et si adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam rescindi possunt. Sed hoc raró accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Proposita Fractionibus carens sit divisibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantùm Terminos habentem, non opùs est, ad inveniendum hunc divisorem, omnia signa radicalia ex Proposita æquatione auferre, sed ea solummodo, quæ in ultimo Termino reperiuntur.

Potest etiam hæc Regula XVI *dividi in duas partes, hoc modo:*

Inquire primùm num Proposita æquatio sit divisibilis per aliam in qua unus pluresve termini desunt, secundùm XI Regulam; Si non sit, tantùm secundùm jam descriptam XVI Regulam inquirendum est, num sit divisibilis per x + vel — aliquo divisore ultimi Termini,

mini, omissis omnibus reliquis divisoribus duarum pluriumve dimensionum.

XVII. *REGULA.*

Quæ docet modum inveniendi omnes æquationes rationales, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit.

Æquatio talis erit divisibilis per aliam rationalem fractione carentem, in qua vel unus pluresve termini deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum est per XI Regulam, num per rationalem fractione carentem, in qua unus pluresve termini deficiant, dividi possit; si comperiatur id fieri non posse, erit ea divisibilis per æquationem nullo termino carentem, & quidem unius dimensionis, si Proposita sit 3 dimensionum; vel per aliquam unius vel duarum dimensionum, si Proposita sit 4 vel 5 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3, si Proposita sit 6 vel 7 dimensionum; vel per aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimensionum, si Proposita habeat 8 vel 9 dimensiones; & sic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea divisibilis sit per æquationem simplicem sive unius dimensionis, antea ostendi: unde solummodo restat, quo modo reliqui divisores, seu æquationes duarum, trium, &c. dimensionum inveniri queant.

Et sciendum, me quantitatem cognitam 2[di] termini, adfectam suis signis + & — vocare p; 3[tii] termini q; 4[ti] r; 5[ti] s; 6[ti] t; 7[mi] v: at divisorem ultimi termini, similiter signis suis adfectum, b.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4[or] DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per æquationem

 ratio-

rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{\frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}}{} x + h \infty 0.$$

Excepto tantùm, cùm $\frac{s}{h}$ est ∞h, ac simul $r \infty hp$, id est, $h \infty 8 \sqrt{s}$, & $h \infty \frac{r}{p}$ tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2h - q} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

1. Et cum æquatio Proposita sit liberata ab omnibus fractis & surdis quantitatibus, atque dividi queat per æquationem rationalem: sequitur, $\frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}$ debere integram esse quantitatem rationalem. Patet etiam s nunquam esse posse ∞hh, nisi s quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficiet etiam illos solùm divisores ultimi Termini qui ipsius $\sqrt{}$ Q^{am}. non excedunt considerare, nimirum, si æquatio sit numeralis; sed si sit literalis, opùs tantùm erit divisoribus uti duarum dimensionum, atque ex his semper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum constituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, si proponatur hæc æquatio numeralis $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \infty 0$, quæ dividi potest per aliquam rationalem; & si compertum sit ipsam indivisibilem esse per x, + vel — aliquo divisore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimensionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi poterit per hanc $xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h} x + h \infty 0$.

Quia igitur hîc p est $\infty - 3$
q, quâ non indigemus, prætereo,
$r \infty - 30$
$s \infty - 200$,

hinc

hinc erit $xx + \frac{r-bp}{\frac{\ }{b}-b}x + b \propto xx + \frac{-30+3b}{\frac{-200}{b}-b}x + b \propto 0.$

Sunt autem Divisores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; seu valores ipsius b, $\propto +1$ vel -1

$$\begin{array}{ll} +2 & -2 \\ +4 & -4 \\ +5 & -5 \\ +8 & -8 \\ +10 & -10 \end{array}$$

Vnde sumendo $b \propto +1$, erit $\frac{-30+3b}{\frac{-200}{b}-b}$ fractio, similiterque si sumatur $b \propto -1$; $\propto +2$; $\propto -2$; $\propto +4$; $\propto -4$, & $\propto +5$. At si sumatur $b \propto -5$, obtinebitur -1, ac proinde tentanda erit divisio per $xx - 1x - 5 \propto 0$. Quoniam autem per hanc fieri nequit, transeo ad alium valorem ipsius b, puta $+8$. Sed cum sic rursus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro b assumitur -8, transeo ad $b \propto +10$. Quia verò r fit $\propto bp$, ac idcirco $xx + b \propto 0$, non poterit similiter hic valor nobis inservire; ita ut nobis solùm restet $b \propto -10$. Vnde obtinetur æquatio $xx - 2x - 10 \propto 0$, per quam Proposita dividi potest.

Eodem modo, si proponatur æquatio literalis

$$x^4 * \begin{array}{l} -bb \\ +2ab \end{array} xx \begin{array}{l} +4abb \\ -a^3 \\ -4b^3 \\ +aab \end{array} x \begin{array}{l} -4b^4 \\ +2aabb \end{array} \propto 0,$$

Quoniam p est $\propto 0$

$$\begin{array}{ll} r & \propto 4abb - a^3 - 4b^3 + aab \\ s & \propto 2aabb - 4b^4, \end{array}$$

erit $xx + \frac{r-bp}{\frac{s}{b}-b}x + b \propto xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + aab}{\frac{2aabb-4b^4}{b}-b}x + b \propto 0.$

Divisores ultimi Termini, duas habentes dimensiones, seu valores ipsius b, sunt

$$\begin{array}{ll} +bb, & \& -4bb + 2aa, \\ -bb, & +4bb - 2aa, \\ +2bb, & +2bb + aa, \\ -2bb; & -2bb - aa. \end{array}$$

Quorum tantùm prioribus 4 indigemus, nimirum, $+bb, -bb,$
$+2bb,$

$+2bb, -2bb$: quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum Terminum producunt.

Sumendo autem $b \infty +bb$, 2^{dus} terminus erit fractio. Hinc transeundo ad $b \infty +2bb$, obtinebitur æquatio $xx \begin{smallmatrix}+b\\-a\end{smallmatrix} x + 2bb \infty 0$. Per quam Proposita dividi potest, invenitur enim pro quotiente hæc $xx \begin{smallmatrix}+a\\-b\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-2bb\\+aa\end{smallmatrix} \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5^{que} DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; poterit ipsa dividi per æquationem hanc

$$xx - \overline{\frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\overline{-\frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{tè}.\, -q + b + \frac{s}{h}}} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

Et cum æquatio hæc debeat esse rationalis quæ nullas admittat fractiones; sequitur 2^{dum} terminum debere esse integram quantitatem rationalem.

Exemplum.

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^5 ** & +8aab\,xx & +2ab^3\; x & -b^5 \;\infty 0. \\ & -63a^3 & +16a^3b & +a^4b \\ & +8abb & +15aabb & -ab^4 \\ & -b^3 & -b^4 & +a^3bb \\ & & -4a^4 & \end{array}$$

Postquam constat, æquationem hanc dividi non posse per ullam aliam, 2 aut 3 dimensiones habentem, in qua unus aut plures termini deficiunt, nec per x 8 aliquo divisore ultimi termini; erit illa divisibilis per superiorem

$$xx - \overline{\frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\overline{-\frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{tè}.\, -q + b + \frac{s}{h}}} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

Quan-

Quantitates cognitæ sunt $p \infty 0$

$q \infty 0$

r nullius hîc est usus.

$s \infty 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t \infty - b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb$,

& divisores ultimi Termini, duas dimensiones habentes, seu valores ipsius h sunt $\infty ab+bb$, vel $-ab-bb$, vel $bb-aa$, vel $-bb+aa$

vel $ab-bb$, vel $-ab+bb$

vel $aa+ab+bb$, vel $-aa-ab-bb$:

hinc si h sumatur $\infty ab+bb$, obtinebitur

$$xx - \frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\overline{-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{\text{tē}} - q + h + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + h$$

æquale $xx - 4ax + ab \infty 0$. Per quam si tentetur utrum Pro-
$\qquad\qquad + bb$

posita dividi queat, invenietur divisionem fieri posse, atque pro quotiente oriri $x^3 + 4axx + 16aax - b^3 \infty 0$.

$$\begin{matrix} & - ab & + a^3 \\ & - bb & \end{matrix}$$

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 6 DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita 6 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; erit ipsa divisibilis vel per æquationem 2 dimensionum, vel per aliquam 3 dimensionum. Si divisibilis sit per æquationem rationalem 2 dimensionum, poterit dividi per æquationem $xx + yx + h \infty 0$,

$$\text{existente } y \infty \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{\overline{\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}}\,\square^{\text{tē}} \frac{+ s - \frac{v}{h} + hh - qh.}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}$$

Si divisibilis sit per æquationem rationalem 3 dimensionum, erit divisibilis

 per

per æquationem $x^3 + yxx + zx + b \propto 0$, existente

$$y^3 \frac{-\frac{pv}{b} - 2pb}{\frac{v}{b} + b} yy \frac{+ppb - 2t}{\frac{v}{b} + b} y \frac{\overline{-\frac{v}{b} + b} \text{ in } r, \overline{-qb + t} \text{ in } p}{\frac{v}{b} + b} \propto 0.$$

$$+ qy \qquad \frac{v}{b} - b$$

$$\& z \propto \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}.$$

Porrò ob eandem rationem atque in præcedentibus Regulis ſequitur y & z debere eſſe integras quantitates rationales.

Atque in hoc ultimo caſu, ubi diviſio per $x^3 + yxx + zx + b \propto 0$ tentanda eſt, opùs tantùm eſt uti diviſoribus ultimi Termini qui ejus radicem quadratam non excedunt, nimirum quando æquatio numeralis eſt; at ipsâ literali exiſtente, ſufficit uti diviſoribus 3 dimenſionum, atque ex his duntaxat alterutro duorum talium, quorum productum ultimum Terminum efficit, haud ſecus ac id in præcedenti Regula pro æquationibus 4^{or} dimenſionum quoque annotatum fuit. Quæ porrò animadverſio locum etiam obtinet in omnibus æquationibus parium dimenſionum, quas dividere tentamus per aliam dimidium præcedentium dimenſionum numerum habentem.

DETERMINATIO 1^{mi} CASVS.

Cùm $2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}$ eſt $\propto 0$, hoc eſt, $b^3 \propto v$, & $b \propto \sqrt{C.v}$:

erit $y \propto \frac{-s + q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}}}$.

Cùm

Cùm $2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}$ est $\propto 0$, ac simul $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, & $-s + q\sqrt{C.v} \propto 0$, hoc est, $b \propto \sqrt{C.v}$, $b \propto \sqrt{\frac{t}{p}}$, & $b \propto \frac{s}{q}$: erit $y^3 - pyy \begin{matrix}+\frac{s}{\sqrt{C.v}}\\ -3\sqrt{C.v}\end{matrix} y \begin{matrix}+2p\sqrt{C.v}\\ -r\end{matrix} \propto 0$.

DETERMINATIO 2[u] CASVS.

Cùm $\frac{v}{b} + b$ est $\propto 0$, erit $yy \begin{matrix}-p\\ +\frac{2t}{pb}\end{matrix} y - \frac{2r}{p} + q - \frac{t}{b} \propto 0$.

Cùm p est $\propto 0$, ac simul $\frac{v}{b} + b \propto 0$, erit $y \propto \frac{rb}{t}$.

Cùm t est $\propto 0$, & $r \propto 0$, ac simul $p \propto 0$, & $\frac{v}{b} + b \propto 0$, erit $y \; * + 2qyy - 8by \begin{matrix}-4s\\ +qq\end{matrix} \propto 0$.

Cùm $2y$ est $\propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \propto 0$, erit $z \propto \frac{t + byy - qb}{\frac{v}{b} - b}$.

Sed cùm determinationes illæ manent, ac simul $\frac{v}{b} - b$ est $\propto 0$, & $t + byy - qb \propto 0$, erit $z \propto \frac{t}{2\sqrt{v}} \pm \sqrt{\frac{tt}{4v} - s + p\sqrt{v}}$.

Denique in omnibus determinationibus advertendum est, quòd, si reperiatur $2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b} \propto 0$, & $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, sed $-s + q\sqrt{C.v}$ non simul esse $\propto 0$; ut & si reperiatur $\frac{v}{b} + b \propto 0$, $p \propto 0$, & $t \propto 0$, sed r non simul $\propto 0$; itemque si reperiatur $2y \propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \propto 0$, & $\frac{v}{b} - b \propto 0$, sed $t + byy - qb$ non simul $\propto 0$;

atque similiter in Regula pro 4^or^ dimensionibus, si $\frac{f}{b} - b$ reperiatur ∞ o, sed non perinde $r - bp \infty$ o: quòd tum inquam valor assumptus ipsius b, quò hoc contingit, nobis inservire non possit.

Exempla 1^mi^ Casus.

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx * + 8 \infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 2 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum igitur hîc p sit $\infty - 3$

$$\begin{array}{lll} q & \infty & 7 \\ r & \infty & -5 \\ s & \infty & 4 \\ t & \infty & 0 \\ v & \infty & 8 \end{array}$$

$$\text{erit } y \infty \frac{ph - \frac{t}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}} \; 8 \sqrt{\frac{ph - \frac{t}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}}\Box^{te} \frac{+s - \frac{v}{b} + bb - qb}{b - \frac{\frac{v}{b}}{b}}}$$

æqualis

$$\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}} \; 8 \sqrt{\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}}\Box^{te} \frac{4 - \frac{8}{b} + bb - 7b}{b - \frac{\frac{8}{b}}{b}}}$$

Divisores autem ultimi Termini, seu valores ipsius b sunt

$$\begin{array}{ll} +1, \text{ vel} & -1 \\ +2, & -2 \\ +4, & -4 \\ +8, & -8. \end{array}$$

Hinc si primò sumatur $b \infty + 1$, poterit radix ex

$$\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}}\Box^{te} \frac{4 - \frac{8}{b} + bb - 7b}{b - \frac{\frac{8}{b}}{b}} \text{ extrahi, inveniturque}$$

$y \infty - 1$, sed æquatio proposita non poterit dividi per $xx - 1x$

$-1x+1 \propto 0$, ac proinde transeo ad $b \propto +2$, sed cum sic b fiat $\propto \sqrt{C.v}$, deberet, juxta determinationes superiores, y esse $\propto \frac{-s+q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v}-\frac{t}{\sqrt{C.v}}}$, hoc est, $\propto \frac{+10}{-6}$. Id quod cum fractio existat, transeo ad $b \propto +4$, atque inde obtineo $y \propto \frac{-12}{+7} \pm \frac{2}{7}$, hoc est, $y \propto -2$, aut $\propto -\frac{10}{7}$. Quorum quidem non nisi $y \propto -2$ retinendum est, adeoque divisio tentanda per $xx+yx+b \propto xx-2x+4 \propto 0$. Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente $x^4-1x^3+1xx+1x+2 \propto 0$.

Eodem modo, si examinare velimus hanc æquationem $x^6+1x^5+1x^4-2x^3+2xx+4x+8 \propto 0$: quoniam p est $\propto 1$, $q \propto 1$, $r \propto -2$, $s \propto 2$, $t \propto 4$, & $v \propto 8$, invenitur

$$y \propto \frac{1b-\frac{4}{b}}{\frac{2b-\frac{16}{b}}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{1b-\frac{4}{b}}{\frac{2b-\frac{16}{b}}{b}}\right)^{\Box^{to}} \frac{+2-\frac{8}{b}+bb-b}{\frac{b-\frac{8}{b}}{b}}}.$$

Sumendo autem $b \propto +1$, non poterit $\sqrt{Q.}$ extrahi; quocirca transeo ad $b \propto +2$, invenioque b fore $\propto \sqrt{C.v}$, ac $b \propto \sqrt{\frac{t}{p}}$, ut & $b \propto \frac{s}{q}$. Vnde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipsius y per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} y^3-pyy+\frac{s}{\sqrt{C.v}}y+2p\sqrt{C.v} \propto 0, \\ \qquad\qquad -3\sqrt{C.v}-r \end{array}$$

hoc est, $y^3-1yy-5y+6 \propto 0$.

E qua æquatione pro y nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde divisio tentanda relinquitur per $xx+yx+b \propto xx+2x+2 \propto 0$. Comperitur autem fieri posse, oritur enim pro quotiente $x^4-1x^3+1xx-2x+4 \propto 0$.

Exempla 2^{di} Casus.

Esto examinandum, an hæc æquatio.

$$x^6 * +1x^4+3x^3+6xx+3x-4 \propto 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 3 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

 Cum

Cum hîc p sit ꝏ 0
q ꝏ 1
r ꝏ 3
s ꝏ 6
t ꝏ 3
v ꝏ -4,

$$\text{erit } y^3 \frac{-\frac{pv}{b}-2pb}{\frac{v}{b}+b}\,yy \frac{+ppb-2t}{\frac{v}{b}+b}\,y \atop {+\,qy} \quad \frac{\overline{-\frac{v}{b}+b}\text{ in } r,\ \overline{-qb+t}\text{ in } p}{\frac{v}{b}+b \quad \frac{v}{b}-b}$$

æqualis

$$y^3 * \frac{+1\,y \atop -6}{-\frac{4}{b}+b}\,y \frac{\overline{\frac{4}{b}+b}\text{ in } 3}{-\frac{4}{b}+b \quad -\frac{4}{b}-b} \propto 0.$$

Divisores ultimi Termini, seu valores ipsius b, qui soli sunt considerandi, sunt $+1$, vel -1, vel $+2$. Vnde sumendo $b \propto +1$, obtinebitur $y^3 * +3y * -10 \propto 0$. Sed cum y hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, transeo ad alium, nempe $+2$. Cum autem sic $\frac{v}{b}+b$ fiat ꝏ 0, atque etiam p sit ꝏ 0, erit, juxta dictam determinationem, $y \propto \frac{rb}{t}$, hoc est, $y \propto 2$. At quoniam pro $z \propto \frac{y^3-pyy+qy+\frac{v}{b}+b-r}{2y-p}$ invenitur fractio, transeo demum ad $b \propto -1$, atque hinc obtineo $y^3 * -1y * \propto 0$, hoc est, $y \propto +1$, & $y \propto -1$. E quibus tandem inveniendus superest valor ipsius z. Quocirca si primùm sumatur $y \propto +1$, invenietur inde $z \propto 1$, & $x^3+yxx+zx+b \propto x^3+1xx+1x-1 \propto 0$. Per quam æquationem Proposita dividi potest, oritur enim pro quotiente $x^3-1xx+1x+4 \propto 0$. Quòd si autem per eam dividi non potuisset, ut nec per aliam, ubi y est ꝏ -1, æquatio Proposita dicto modo non divisibilis fuisset, quandoquidem sic omnes ipsius b valores examini subjecissemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 \infty 0,$$

in qua p est $\infty -6$, $q \infty 25$, $r \infty -36$, $s \infty 3$, $t \infty 16$, $v \infty -28$, & $b \infty +1$ vel -1, aut $+2$ vel -2, aut $+4$ vel -4, (neglectis scilicet reliquis divisoribus, radicem quadratam ultimi termini excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum unoquoque valore ipsius b, si pro b assumitur -2, æquationem hanc $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 \infty 0$, in qua y admittit tantummodo unum valorem rationalem, qui integer numerus est nempe -3. Per hunc autem quæro valorem ipsius z. Sed cum hîc $2y$ sit ∞p, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty 0$, non possum eundem per hanc æquationem $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}$ invenire, quo circa illum quæro per hanc $z \infty \frac{t + byy - qb}{\frac{v}{b} - b}$, atque invenio $z \infty 3$, &

$$x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 - 3xx + 3x - 2 \infty 0.$$

Per quam igitur examinando an Proposita dividi queat, comperietur divisionem fieri posse, orieturque pro quotiente $x^3 - 3xx + 13x + 14 \infty 0$. Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi $2y$ est ∞p, non fuisset $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty 0$, oportuisset transire ad alium valorem ipsius b.

Vbi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 dimensionum non solùm sciri posse, an Proposita aliqua æquatio per aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, divisibilis sit; sed etiam utrum ipsa divisibilis sit per rationalem, in qua aliquis Terminus deficiat. Verùm cum idem faciliùs cognosci queat per XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem usus harum Regularum vel eo major est, quo pauciores divisores ultimus Terminus Propositæ æquationis admittit, haud inconsultum fuerit hîc adjungere modum, quo plerumque levi negotio Propositam æquationem in aliam transmutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimensiones, quæque indivisibilis sit si Proposita sit indivisibilis, at divisi-

visibilis, si Proposita divisibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipsam dividentibus facilè quoque inveniri possint æquationes, Propositam dividentes.

Assumpto in hunc finem valore aliquo pro x, ut lubet, eoque subrogato ubique in locum x, quærantur divisores omnes aggregati omnium terminorum; &, si divisores hi non pauciores numero fuerint divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ, sumatur rursus alius valor pro x, exploreturque num hinc aggregatum pauciorum divisorum inveniatur; quòd si non fiat, denuò pro x alius valor assumendus est, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum resultet, quod pauciores divisores habeat. Quo peracto, ponatur $x \infty z, +$ assumpto ipsius x valore, hujusmodi aggregatum pauciorum divisorum suggerente, atque hîc valor $z +$ &c. ubique in locum x substituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua z erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum divisorum; ita ut hæc æquatio talis futura sit, qualis requiritur, nimirum indivisibilis si Proposita indivisibilis sit, at divisibilis si Proposita divisibilis fuerit.

Exempli gratiâ, esto invenienda ejusmodi æquatio loco hujus
$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty 0$.

Sumatur $x \infty 1$, fietque

$$
\begin{array}{rl}
x^5 \infty & +1 \\
+2x^4 \infty & +2 \\
-58x^3 \infty & \ldots -58 \\
-49xx \infty & \ldots -49 \\
-50x \infty & \ldots -50 \\
-600 \infty & \ldots -600, \\
\hline
\end{array}
$$

& $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty + 3 - 757$, hoc est, $\infty - 754$. cujus quidem numeri divisores multò pauciores existunt quàm ipsius -600.

Hinc ponendo $x \infty z + 1$,

erit

$$\begin{array}{lllllll}
\text{erit} \quad x^5 \propto & z^5 + 5z^4 & + 10z^3 & + 10zz & + 5z & + 1 \\
+ 2x^4 \propto & + 2z^4 & + 8z^3 & + 12zz & + 8z & + 2 \\
- 58x^3 \propto & & - 58z^3 & - 174zz & - 174z & - 58 \\
- 49xx \propto & & & - 49zz & - 98z & - 49 \\
- 50x \propto & & & & - 50z & - 50 \\
- 600 \propto & & & & & - 600, \\
\hline
\end{array}$$

$$\& \; z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754 \propto 0.$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata divisibilis reperitur per $zz + 3z - 58 \propto 0$, ac proinde cum x sit $\propto z + 1$, erit $z \propto x - 1$. Unde si in locum z subrogetur $x - 1$, obtinebitur $zz + 3z - 58 \propto xx + 1x - 60 \propto 0$. per quam itaque Proposita quoque æquatio divisibilis erit.

Quòd si autem post primam positionem ipsius $x \propto + 1$ obtinuissemus aggregatum, quod nobis non inserviisset, id est, quod non pauciores aut adhuc nimis multos divisores admisisset, ponere potuissemus $x \propto - 1$; quòd si verò & hinc quæsitum aggregatum nondum invenissemus, ponere possemus $x \propto + 2$; deinde $x \propto - 2$, atque ita porrò; vel etiam possemus nonnullos terminos supponere $\propto 0$, si aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro x inveniri posset. Exempli gratiâ, possemus in æquatione allata duos priores terminos $x^5 + 2x^4$ supponere $\propto 0$, atque sic invenire $x \propto - 2$, quærendo tantùm ulteriùs aggregatum reliquorum Terminorum $- 58x^3 - 49xx - 50x - 600$. Porrò, quod hîc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc $x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \propto 0$,
$+ 10a^4$
ponere possumus $x \propto + a$, vel $x \propto - a$, vel $x \propto + b$, vel $x \propto - b$, &c. vel etiam supponere terminos aliquos $\propto 0$, ut $- 6abx^3 \propto + 30aabxx$, prout visum fuerit.

3. Verùm enimvero magnum hîc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantùm, cùm hoc aggregatum nullos divisores præter unitatem ac se ipsum admittit* (quos quidem divisores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujusque termini membra eundem dimensionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere soleo, cum nulla divisio per eos fieri possit), *manifestum est, æquatio-*

nem Propositam per aliam rationalem, in qua sive omnes sive non omnes termini extant, & sive unius sive plurium est dimensionum, penitus esse indivisibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propositam nunquam fore divisibilem per æquationem rationalem, cujus dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicujus ex divisoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca si æquatione existente 6 dimensionum divisores non nisi 1 & 5 dimensionum fuerint, erit ea indivisibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimensionum; & si divisores tantùm 2 & 4 dimensionum fuerint, erit ipsa indivisibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimensionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc considerationem non tantùm multi casus resecari queant, quando æquatio per aliam rationalem divisibilis est; sed etiam si inquirere velimus, num Proposita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem divisibilis sit, poterit sæpissimè parvo admodum labore indivisibilitas, si ea sit indivisibilis, cognosci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \propto 0,$$
$$+ 10a^4$$

ponaturque $x \propto a$, obtinebitur

$$\begin{array}{rlrl} x^5 & \propto & + & a^5 \\ - \; 6abx^3 & \propto \; . \; . \; . & - & 6a^4b \\ + \; 30aabxx & \propto & + & 30a^4b \\ + \; 24a^3bx & \propto \; . \; . \; . & - & 24a^4b \\ + \; 10a^4x & \propto & + & 10a^5 \\ + \; 120ab^4 & \propto & + & 120ab^4 \\ \hline \end{array}$$

& fit aggregatum $+ 11a^5 + 120ab^4$.

Cujus divisores (omissis unitate ac ipso aggregato) tantùm sunt $+a$, $-a$, $11a^4 + 120b^4$, & $-11a^4 - 120b^4$, unius scilicet & 4^or^ dimensionum: ita ut Proposita æquatio, si per rationalem unius dimensionis divisibilis non fuerit, penitus per rationalem futura sit indivisibilis. Quoniam autem hîc x est $\propto z + a$, addi debet a divisoribus $+a$, & $-a$, ad habendos valores ipsius x, idcirco tantummodo $x - 2a \propto 0$ pro divisore assumi posset. Sed

per

per hunc æquatio Proposita non est divisibilis, quare illa etiam per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod si juxta unam positionem non ita accidisset, facilè fuerit aliam instituere, ponendo $x \infty b$, vel $\infty - a$, vel $\infty - b$, &c. Et raro continget, quin per hanc transmutationem æquationis Propositæ in aliam aliquod commodum consequuturi atque operæ plurimùm sublevaturi simus.

XVIII. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem sive literalem sive numeralem, & quæ ex multiplicatione duarum aliarum, quarum ultimi Termini sunt quantitates rationales, fractioneque carentes, produci possunt.

Hæc Regula parùm à præcedenti differt, nisi quòd se latiùs extendat, & per hanc quoque Reductiones ejusmodi æquationum semper inveniri possint, quæ ex duabus aliis, sive rationales, sive irrationales sint, produci possunt, hoc tantùm excepto, quòd ultimi earum termini sint quantitates rationales: cum præcedens Regula se solùm extendat ad æquationes, quæ non nisi ex rationalibus produci possunt: ideoque tantùm opùs est, ut solummodo iisdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd necesse sit, ut illæ æquationes, ex quibus Proposita æquatio produci potest, sint rationales, quod hìc non requiritur. Exempli loco sit prima

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4or DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per aliam, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, & cujus ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b} x + b \infty 0.$$

 Ex-

Excepto tantùm, cum $\frac{s}{b}$ est ∞ b, ac simul $r \infty bp$, id est, $b \infty 8 \sqrt{s}$, & $b \infty \frac{r}{p}$, tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2b - q}, \text{ in } x, + b \infty 0.$$

ubi patet s nunquam esse posse ∞ bb, nisi s quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficit etiam illos solùm divisores ultimi termini, qui ipsius radicem quadratam non excedunt, considerare, &c.

Exempli gratiâ, examinaturus hanc æquationem

$$x^4 - 2ax^3 + \begin{matrix} 2aaxx \\ -\ cc \end{matrix} - 2a^3x + a^4 \infty 0:$$

quoniam $p \infty -2a$, $q \infty 2aa - cc$, $r \infty -2a^3$, $s \infty a^4$, hinc erit

$$xx + \frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b}x + b \infty xx \frac{-2a^3 + 2ab}{\frac{a^4}{b} - b} x + b \infty 0.$$

Sunt autem divisores ultimi Termini, seu valores ipsius b, $+aa$ & $-aa$. Vnde sumendo $b \infty aa$, obtinebitur $\frac{a^4}{b} - b \infty 0$, ac etiam $-2a^3 + 2ab \infty 0$ (hoc est, $\frac{s}{b} \infty b$, & simul $r \infty bp$.) ac proinde tentanda erit divisio per $xx + \frac{1}{2}px \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2b - q}, x, + b \infty 0$, hoc est, per $xx - ax + \sqrt{aa + cc}, x, + aa \infty 0$, vel per $xx - ax - \sqrt{aa + cc}, x, + aa \infty 0$: Quæ divisio per utramque succedit.

Ita etiam se res habet in

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 5[que] DIMENSIONVM.

Si enim æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per aliam plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, cujusque ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx - \frac{\frac{t}{b} + \frac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\left(-\frac{\frac{t}{b}}{2b} + \frac{1}{2}p\right)^{\square^{te}} - q + b + \frac{s}{b}}}{2b} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

Et

Et ſic porrò de cæteris Regulis, tantùm, uti dictum eſt, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, illic ſint rationales, quod ſolùm hîc non requiritur.

Animadvertendum quoque eſt, hanc Regulam ſe non ſolùm extendere ad æquationes, in quibus nec ſigna radicalia, nec Fractiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantùm quadrat,) ſed quoque ad illas, in quibus & radicalia ſigna & Fractiones reperiuntur, hoc tantùm excepto, quòd non ſint in ultimo Termino, ut antea dictum.

Denique notandum eſt, quòd idem etiam ſequenti modo inveniri poſſit.

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 5 DIMENSIONVM.

Quære communem diviſorem duarum æquationum,

$$\begin{array}{llll} yy & +\frac{t}{bb}\,y & +q & \infty\ 0, \\ & -p & -b & \\ & & -\frac{s}{b} & \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{ll} yy & -\frac{sb}{t}\,y \\ & +\frac{b^3}{t} \end{array} \frac{-bbp-t+rb}{\frac{t}{b}}\ \infty\ 0,$$

& per eum, valorem ipſius y; eritque Propoſita æquatio diviſibilis per $xx + yx + b \infty 0$.

REGVLA PRO ÆQVATIONIBVS 6 DIMENSIONVM.

Si Propoſita æquatio diviſibilis eſt per

$$xx + yx + b \infty 0,$$

quæratur communis diviſor duarum æquationum,

$$\begin{array}{lll} byy & -\frac{v}{bb}\,yy & -pby \\ & +\frac{t}{b} & +\frac{v}{b} \\ & & -bb \\ & & +qb \end{array} -s\ \infty\ 0, \quad \& \quad \begin{array}{lll} y^3 & -pyy & +qy \\ & -2b & +pb \\ & -\frac{v}{bb} & +\frac{t}{b} \end{array} -r\ \infty\ 0,$$

& per eum, valor ipſius y.

 Si

Si Proposita æquatio est divisibilis per $x^3 + yxx + zx + b \infty 0$, possunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ sunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4^{or} dimensionum, quarum communi divisore invento, per eum valor incognitæ quantitatis y inveniri potest; valor verò ipsius z quæratur eodem modo, quo antea. Eadem est ratio in altioribus æquationibus.

Sed si nullus inveniatur communis divisor, assumptum valorem ipsius b relinquo, & alium assumo. Et si omnes termini alterius æquationis se invicem tollant, per alteram inveniendus est valor ipsius y.

XIX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fractione & 2^a termino carentem, quæ dividi possit per aliam cujus 2^dus terminus sit rationalis, &c.

Primùm inquiro per XI Regulam, an Proposita æquatio divisibilis sit per aliam in qua non omnes termini extant; quod si fieri nequit, erit divisibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam sequenti modo invenio. $1^{mo.}$ Experior num dividi possit per $x +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini; si neque hoc succedat, facio æquationem ejusdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita sumi queunt, ut productum totidem habeat dimensiones quot Proposita æquatio, non annumerando æquationem unius tantùm dimensionis. Exempli gratiâ, si æquatio Proposita habeat 8 dimensiones, considero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimensiones; aut, si 9 dimensiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimensionum fuerint, ex quarum multipli-

plica-

plicatione Propofita poffet produci. 3^tio^. Poft hæc tranfmuto Propofitam æquationem in aliam, cujus incognita quantitas defignet quantitatem 2^di^ Termini, unius harum duarum æquationum, quæ, (fi inæqualium dimenfionum fuerint,) pauciores dimenfiones habeat, 4to. Poftremò inquiro num inventa æquatio divifibilis fit per incognitam quantitatem + vel — aliquo divifore ultimi fui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimenfionum,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0,$$

in qua q defignet quantitatem cognitam tertii termini fuis fignis + & — adfectam; r quarti; s quinti; t fexti; & v ipfum ultimum terminum: Et quam fuppono indivifibilem per aliam æquationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per x, + vel — aliquo divifore ultimi Termini.

Primò itaque inquiro utrum ipfa divifibilis fit per æquationem 2 dimenfionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{llllll}
x^4 - yx^3 + zxx + kx + l & & & & & \propto 0 \\
xx + yx + w & & & & & \propto 0 \\
\hline
x^6 - yx^5 & + zx^4 & + kx^3 & + lxx & & \\
\quad + y & - yy & + yz & + yk & + ylx & \\
 & + w & - wy & + wz & + wk & + wl \\
\hline
x^6 \; * & + qx^4 & + rx^3 & + sxx & + tx & + v \propto 0.
\end{array}$$

Vnde hæ 5 æquationes refultant

1ma. $z - yy + w \propto q$

2da. $k + yz - wy \propto r$

3^tia^. $l + yk + wz \propto s$

4ta. $yl + wk \propto t$

5ta. $wl \propto v$.

Per 1^mam^ fit $z \propto q + yy - w$, qui valor fi in locum ipfius z in reliquis æquationibus fubrogetur, habebitur

pro 2da. $k + qy + y^3 - 2wy \propto r$

3^tia^. $l + yk + qw + yyw - ww \propto s$

4ta. $yl + wk \propto t$

5ta. $wl \propto v$.

Per

Per 2^dam fit $k \infty r-qy-y^3+2wy$, qui valor in locum ipsius k in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro 3^tia. $l+ry-qyy-y^4+3wyy+qw-ww \infty s$

4ta. $yl+rw-qwy-y^3w+2wwy \infty t$

5ta. $wl \infty v$.

Per 3^tiam fit $l \infty s-ry+qyy+y^4-3wyy-qw+ww$, qui valor in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro 4ta. $sy-ryy+qy^3+y^5-4wy^3-2qwy+3wwy+rw \infty t$

5ta. $sw-ryw+qyyw+y^4w-3wwyy-qww+w^3 \infty v$.

Per 4^tam æquationem invento valore ipſius ww (aut ipſius $3ww$), ſubſtituo ipſum in locum ww (aut $3ww$) in 5ta æquatione, obtineoque 6^tam æquationem, in qua w tantùm 1 dimenſionem habet, nimirum:

$$w \infty \frac{5y^7+6qy^6-4ry^5+5sy^4+qqy^4-5ty^3-rryy+qsyy-9vyy-qty+sry-tr}{14y^6+8qy^4+5ry^3+2qqyy-6syy+qry-3ty-rr}.$$

Qui valor ſi jam in 4ta æquatione in locum w ſubrogetur, habebitur pro ipſa

$$\begin{array}{llllllllll}
y^{15}\ * & +4qy^{13} & -2ry^{12} & +6qqy^{11} & +10ty^{10} & -2qsy^9 & +12qty^8 & -3rty^7 & +10sty^6 \\
 & & & -2s & -6qr & -26v & +6rs & -24qv & -30rv \\
 & & & & & +4q^3 & -6qqr & -7ss & +2qqt \\
 & & & & & & & +2qqs & +4qrs \\
 & & & & & & & +q^4 & +2r^3 \\
 & & & & & & & & -2q^3r
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
-12tty^5 & +2qsty^4 & -5qtty^3 & -6rttyy & -qqtty & -qrtt \infty 0. \\
+6qrt & -6qrv & +7rst & +2r^3s & +3stt & +t^3 \\
-18qqv & -6rrt & +3rrv & & +qrst & +rrst \\
-6qss & +8rss & +qqrt & & +3qrrv & -r^3v \\
-6rrs & -2qqrs & -4q^3v & & -9rtv & \\
+2q^3s & +2qr^3 & +qqss & & -r^3t & \\
+54sv & -18tv & +18qsv & & -rrss & \\
 & & -4s^3 & & & \\
 & & -2qrrs & & & \\
 & & -r^4 & & & \\
 & & -27vv & & &
\end{array}$$

Hæc autem æquatio ea eſt, quæ juxta Regulam erat quærenda, nempe in qua y deſignat quantitatem ſecundi Termini hujus æquationis $xx+yx+w \infty 0$, quæ una eſt duarum, ex quarum multiplicatione Propoſita ſupponitur eſſe producta, quæque pauciores habet dimenſiones.

Nunc verò inquirendum reſtat, num hæc æquatio diviſibilis ſit per $y+$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini $-qrtt+t^3+rrst-r^3v$; Si enim diviſibilis ſit, erit quoque w cognita, poterit-

teritque Proposita æquatio dividi per $xx + yx + w \infty 0$. Invenitur namque valor ipsius w per quartam æquationem

$$\frac{sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \infty t}{ww \infty \begin{array}{l} \frac{4}{3}yy \\ \frac{2}{3}q \\ -\frac{1}{3}r \end{array} w + \frac{t}{3y} \; \frac{-s + ry - qyy - y^4}{3}}.$$

Vel ipsa inveniri quoque poteſt per 5^{tam}; ut & per 6^{tam}, cùm 5ta per 4^{tam} non eſt diviſibilis.

Quòd ſi jam hæc æquatio 15 dimenſionum non fuerit diviſibilis per y + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, poterimus rurſus eodem modo æquationem ejuſdem formæ facere, ſupponendo Propoſitam eſſe productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, inveſtigando æquationem, in quâ incognita quantitas rurſus deſignet quantitatem 2^{di} termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem aſcendet ad 20 dimenſiones, ſed ubique parium erit dimenſionum; ita ut hîc diviſio tunc exploranda ſit per incognitæ quantitatis quadratum + vel — aliquo diviſore ultimi Termini.

Haud ſecus ſi Propoſita æquatio ſit 5 aut 4 dimenſionum, atque conſtet ipſam dividi non poſſe per aliam æquationem in qua unus pluresve Termini deficiant, nec per x + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, erit ea diviſibilis per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimenſionum

$$x^5 * + qx^3 + rxx + sx + t \infty 0,$$

ſi ſolummodo in operatione præcedenti ponamus l & $v \infty 0$, inveniemus

pro $3^{tiâ}$. $ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \infty s$,

& pro $4^{tâ}$. $rw - qwy - y^3w + 2wwy \infty t$.

Per 3^{tiam} autem valor ipſius ww eſt $\infty ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - s$, qui valor in locum ipſius ww ſubſtitutus in 4ta dabit

pro $5^{tâ}$. $w \infty \dfrac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2sy + t}{r + 5y^3 + qy}$.

Porrò ſubrogato hoc valore ubique in locum ipſius w in 3^{tia}, obtinebitur

$$\begin{array}{llllllll} y^{10} * + 3qy^8 - ry^7 & + 3qqy^6 & - 2qry^5 & - 2qsy^4 & + 4sry^3 & - 4ssyy & - 4sty & - tt \infty 0. \\ & - 3s & + 11t & - rr & + 4qt & + 7rt & + r^3 & - rrs \\ & & & + q^3 & - qqr & + qqs & + tqq & + tqr \\ & & & & & - qrr & & \end{array}$$

Et hæc est æquatio quæ inservit dividendis æquationibus 5 dimensionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimensionum, utpote $x^4 * + qxx + rx + s \infty 0$, concipiendo k, l, t, & $v \infty 0$, invenio

pro 2da. $qy + y^3 - 2wy \infty r$,
& pro 3^{tia}. $qw + yyw - ww \infty s$.

Ponendo jam valorem ipsius $w \infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$ in 3^{tia}, obtinebitur

$$\begin{array}{lll} y^6 + 2qy^4 & + qqyy & - rr \infty 0. \\ & - 4s & \end{array}$$

Quæ æquatio erit divisibilis per yy, + vel − aliquo divisore ultimi Termini, atque æquatio Proposita $x^4 * + qxx + rx + s \infty 0$ per $xx + yx + w \infty 0$, ut & per $xx - yx + z \infty 0$; hoc est,

$$\text{per } xx + yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} \infty 0,$$

$$\& \; xx - yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} \infty 0.$$

Vbi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadratæ reduci possunt, esse planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 suæ Geometriæ descripsit. Nec dubitare possim, quin ipsam eodem modo, vel certè non multùm absimili invenerit; præsertim si ea, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius Methodo secantium, & quæ deinceps pag. 49 exposuit. Adeò ut, judicio meo, ne quidem verisimile videatur, imprimis si concinnam præcedentium cum sequentibus cohærentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novisti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hîc ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis adeò sunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipsorum scripta cum hujus scriptis comparaverit, in hasce cogitationes incidere unquam possit; Quemadmodum nemo tam præpostero est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hîc quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem nostrûm respectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multique alii, qui superiori & hoc nostro sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteros nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. At majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantùm agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm suo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs sed tutiùs etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs ac distinctiùs quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantùm ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retrò annis intercessit, penitus pernovisti, quemque interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantâ promptitudine resolvere, ac si non difficilliores, quàm omnium facillimæ, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi maximâ cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipse fassus es) quòd non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potius transtulisse, quàm ex propriis fundamentis, fœcundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed de his satis.

Iam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hîc factâ eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem possunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ considerantur; quod, meo quidem judicio, magni usus est, cum sæpenumero quæstiones difficiliores, unam tantùm incognitam quantitatem supponendo, aut non resolvi posse, aut multo majori labôre, aut certè ad eas resolvendas alias vias quàm hactenus imitari consuevimus ineundas esse, deprehenderim; quod etiam Cartesium nostrum non latuisse ex pag. 4, aliisque passim locis luculenter constat. quod nihilominus haud ita pridem ab insigni Mathematico in dubium revocari comperi, cujus rei causam hanc conjicio, quòd in aliorum scriptis magis quàm in hujus versatus fuerit. Dixi autem hâc Regulâ tolli eas quantitates, quæ quidem tolli possunt: non enim semper omnes possunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam si quæstio non sit Theorema, omnes tolli nequeunt; & si determinata sit, omnes unâ exceptâ tolli possunt; si verò una deficiat conditio, quò minùs determinata existat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & sic deinceps, ut nosti. Neque, quod sedulò observo, etiam semper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli potest. Exempli gratiâ, in duabus hisce æquationibus

$$x^3 - 3zxx \begin{array}{l} + bbx \\ + bz \\ + zzz \end{array} \begin{array}{l} - zzb \\ - zbb \\ \end{array} \infty\, 0,$$

&

$$x^3 - 4zxx \begin{array}{l} + zbx \\ + 4zz \\ + bb \end{array} \begin{array}{l} - 2zzb \\ - 2zbb \\ \end{array} \infty\, 0,$$

in quibus x & z duas incognitas quantitates designant, potest x vel z per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio est, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, si omnes ejus conditiones includant, non determinatum esse, atque unam in eo conditionem, ut prorsus determinatum sit, deficere. Non rarò etiam licet in resolvendo aliquo Problemate determinato diversas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porrò quomodo easdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Propoſita, ut ante,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + fxx + tx + v \infty 0,$$

& inquiratur num dividi poſſit per æquationem duarum dimenſionum cui nullus terminus deſit, pone per $xx + yx + w \infty 0$. ſi itaque per eam diviſibilis ſit, erit $xx \infty - yx - w$, quo valore ipſius xx, ubique in locum xx ſubrogato, reſultabit æquatio in qua x unam tantùm habebit dimenſionem, nimirum

$$\begin{array}{ll} -3wwyx - & w^3 \quad \infty 0. \\ - \; y^5 & - wy^4 \\ +4wy^3 & +3wwyy \\ - \; qy^3 & + qww \\ +2qwy & + rwy \\ - \; rw & - fw \\ + yyr & - qwyy \\ - \; fy & + v \\ + \; t & \end{array}$$

Deinde pono ſingulos terminos $\infty 0$, adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$-3wwy - y^5$ &c. $\infty 0$. &, $-w^3 - wy^4$ &c. $\infty 0$. eaſdem quæ præcedentes 4ta & 5ta; Ita ut w, eodem quo ibi modo, ablatâ, eandem tandem æquationem nanciſcaris $y^{15} * + 4qy^{13}$, &c. $\infty 0$

Eodem modo ſe res habet in reliquis.

Illud verò notandum eſt, hanc poſitionem $xx - yx - w \infty 0$ ſeu $xx \infty yx + w$ paulò faciliorem reddere operationem, cum in ſubrogatione valoris ipſius xx non opùs ſit ut ſigna mutentur, quod alioqui ſecundùm priorem poſitionem $xx + yx + w \infty 0$ contingit: Itaque hæc pro illa potiùs eſt eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum eſt, ut idem effectus utriuſque methodi evidentiùs pateret. Eodem modo, ſi præcedens æquatio inquirenda eſſet, num dividi poſſet per æquationem trium dimenſionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam $x^3 \infty yxx + wx + z$, ſed non $x^3 + yxx + wx + z \infty 0$, quemadmodum, ſi aliam Methodum ſequerer, facturus eſſem.

Supervacaneum verò est me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4^{or} dimensionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allatæ sint) se extendere ad omnes casus: nam cum q denotet quantitatem cognitam tertii termini Propositæ æquationis, affectam suis signis $+$ & $-$; manifestum est in Regulis valorem ipsius q tantùm subrogandum esse in locum q; vel si fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per q multiplicatas, cum etiam tum sint ∞ 0, delendas esse. ita quoque se res habet in r, s, & t. Verbigratiâ, si hæc æquatio 5 dimensionum $x^5 * * + 6xx - 25x - 39 \infty 0$ divisibilis esset per rationalem duarum dimensionum, in qua nullus terminus deest; Oportet, cum in hac æquatione q sit $\infty 0$, $r \infty 6$, $s \infty -25$, $t \infty -39$, loco hujus $y^{10} * + 3qy^8 - ry^7$ &c. ∞ 0, scribere hanc $y^{10} * * - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 \infty 0$. quâ y invenitur $\infty -1$, ideoque $w \infty \frac{-2ryy + 2qy^3 \text{ \&c.}}{r + 5y^3 + qy} \infty -3$; & pro $xx + yx + w \infty 0$, hæc $xx - 1x - 3 \infty 0$, per quam Proposita æquatio erit divisibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, sicut etiam in 17ma aliisque Regulis, quomodo omnes casus æquationum æqualium dimensionum, sive aliqui termini desint, sive non, vel quo tandem modo signis $+$ & $-$ affecti sint, sub una eademque Regula comprehendi possint, adeò ut sexcenti ejusmodi casus ad unum referri & multi labores rescindi queant. Quod satis superque Regula æquationum 4 dimensionum, cum omnibus casibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immensusque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonstrant; præsertim si eâdem ratione omnes casus æquationum 5 & 6 dimensionum describere vellent.

Denique notandum, cùm dico, primùm inquirendum esse num æquatio Proposita dividi possit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud sequendum esse; non enim id necessarium, sed plerumque brevissima via est ad æquationem Propositam reducendam.

XX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem ra-

tiona-

tionalem 4 dimensionum, fractioneque carentem, 2ª verò termino, si adsit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, si fieri potest, ad alias pauciorum dimensionum.

Postquam exploratum est æquationem Propositam non esse divisibilem per aliam, duos duntaxat terminos habentem, inveniendus est valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp & \propto 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

ubi p designat quantitatem cognitam, suis signis + vel − adfectam 2ᵈⁱ termini; q, tertii; r, quarti; s, quinti. Invento autem valore ipsius y, poterit æquatio Proposita ejusdem ope dividi in duas æquationes sequentes, quæ singulæ duas dimensiones habent, nimirum in

$$xx + \tfrac{1}{2}px + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \propto 0,$$

$$\& \; xx + \tfrac{1}{2}px - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \tfrac{1}{4}y - \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \propto 0.$$

Quòd si verò valor ipsius y non sit æqualis alicui ex divisoribus ultimi termini $-spp + 4qs - rr$, non poterit æquatio Proposita ulteriùs quàm ad tres dimensiones reduci.

Exempli gratia, si reducere velimus æquationem $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 \propto 0$, quæ per æquationem, duos solummodo terminos habentem, est indivisibilis, invenio

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp \propto y^3 + 2yy * -16 \propto 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

(nam $p \propto -2$; $q \propto -2$; $r \propto -2$; $s \propto 1$). quæ dividi potest per $y - 2 \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$\begin{array}{ll} xx - 1x + 1 \propto 0, & \& \; xx - 1x + 1 \propto 0. \\ \quad +\sqrt{5} & \qquad\quad -\sqrt{5} \end{array}$$

Eodem modo si habeatur æquatio $x^4 ** -12x - 5 \propto 0$, obtineo

tineo $y^3 * + 20y - 144 \propto 0$, pro
$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0 \\ \qquad\quad\;\; + pr \;\; + 4qs \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - rr \end{array}$$
(nàm $p \propto 0$, $q \propto 0$, $r \propto -12$, $s \propto -5$.) quæ divisibilis est per $y - 4 \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 \propto 0,$$
$$\& \; xx - 2x - 1 \propto 0.$$

Similiter si proponatur æquatio literalis

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0, \text{ erit } p \propto -2a; \\ \qquad\qquad\quad\;\, - cc \end{array}$$

$q \propto 2aa - cc$; $r \propto -a^3$; $s \propto a^4$, ideoque in locum æquationis
$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0, \text{ scribenda } y^3 - 2aayy * - 4a^4cc \propto 0, \\ \quad + pr + 4qs \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + cc \\ \qquad\; - rr \end{array}$$
quæ dividi potest per $y - 2aa \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0,$$
$$\& \; xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0.$$

Si verò hæ æquationes per $y +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini non fuissent divisibiles, non potuissent etiam æquationes Propositæ ulteriùs quàm ad 3 dimensiones reduci.

XXI. *REGULA.*

Hactenus Regulæ, quas tradidi, respexerunt æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas, quam x nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus distinctiùs exprimerem. Iam uno adhuc verbo adjiciam: *Quòd in Proposita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu Reductionis considerare liceat; & quòd sæpe compendio sit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam considerare & sic Reductionem inquirere.* Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri possunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam considerando, quàm per incognitam reductio inveniri potest, & sæpe etiam breviùs, si ex solis irrationalibus produci possunt. Dein quòd hoc sæpe compendio sit, vel hinc

hinc manifestum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimensionum numerum habent, atque adeò, si aliquam ex cognitis pro incognita consideres, sæpe quoque aliqua æquatio exsurget, quæ pauciorum sit dimensionum quàm Proposita; & adhuc pauciorum, si etiam inter ipsas cognitas delectum instituas; aut saltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

Considerando itaque omnes sine discrimine literas ut cognitas, ejusmodi ex illis eligere & pro incognita supponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, respectu Reductionum, utilissima est.

Et per eam non tantùm Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propositi Problematis conditiones includunt, ope Regularum supra explicatarum sæpe compendiosissimè inveniuntur, sed etiam priusquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones rescindi & simplicissimæ sæpe æquationes haberi possunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, sed ne te atque etiam me diutiùs remorer, unum tantùm & alterum exemplum adjungam.

Quo modo reducere possis omnem rationalem æquationem, quæ per aliam rationalem, non cognitis ultimi Termini divisoribus, dividi queat, remanente etiam, si placet, omni Fractione, quæ in illa reperitur; nimirum, si in æquatione illa aliqua litera, sive cognita, sive incognita reperiatur, secundùm quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimensiones, vel etiam plures, sed quæ ex his derivari possint: Id quod semper ex investigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit, uno tantùm casu excepto, quem postea indicabo.

 1. *Exem-*

1. *Exemplum*, in quo litera b ubique unam tantùm dimenſionem habet.

Eſto æquatio Propoſita
$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \propto 0 \\ \quad\;\; + b \qquad - ab \qquad\qquad + ba^3 \end{array}$$

Ergo $\overline{bx^3 - abxx + ba^3} \propto -x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4$

div. per $x^3 - axx + a^3$. fit $b \propto -x + a$

& $\overline{x - a + b} \propto 0$. Æquatio, per quam Propoſita dividi poteſt.

2 *Exemplum*.

Eſto æquatio Propoſita
$$\begin{array}{l} x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \propto 0 \\ \quad\;\; - 2a \qquad + 70ab \quad - 60aab \end{array}$$

Ergo $\overline{-20bxx + 70abx - 60aab} \propto -x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3$

div. per $-20xx + 70ax - 60aa$. fit $b \propto \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}$. Hujus autem maximus communis diviſor, per Methodum ante deſcriptam, eſt $x - 2a$, per quem ſi fractio abbrevietur,

fiet $b \propto \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}$, vel $\frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$

ſeu, quod idem eſt, $\overline{xx - 20bx + 30ab} \propto 0$. Ita ut æquatio
$\quad + 60aa$

Propoſita in hanc, & præcedentem $x - 2a \propto 0$ diviſa ſit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas c tantùm 1 & 2 habet dimenſiones.

Eſto æquatio Propoſita
$$\begin{array}{l} x^4 * + 8acxx - 4aacx + 12aacc \propto 0 \\ \qquad\;\; - aa \end{array}$$

Ergo
$$\overline{12aacc} \propto \begin{array}{l} -8axxc - x^4 \\ +4aaxc + aaxx \end{array}$$

div. per $12aa$. fit $cc \propto \overline{\frac{4ax - 8xx}{12a}}$ in c, $+ \frac{aaxx - x^4}{12aa}$

Vnde extractâ radice invenietur

$c \propto \frac{ax - xx}{2a}$, hoc eſt, $xx - ax + 2ac \propto 0$

vel $c \propto \frac{-ax -}{6a}$, hoc eſt, $xx + ax + 6ac \propto 0$.

Ita ut æquatio Propoſita in haſce duas ſit diviſa. Quoniam autem

tem in ea a quoque 1 & 2 tantùm dimensiones habet, potuisset idem etiam quærendo valorem ipsius a investigari.

Vbi notari potest, quòd, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor quæritur, non plures habet dimensiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. scire non sit necesse, cujusnam illa sequentium formularum existat.

$$xx - ax + bc \propto 0$$
$$xx + ax + bc \propto 0$$
$$xx + ax - bc \propto 0$$
$$xx - ax - bc \propto 0.$$

Etenim positâ $xx, px, q \propto 0$, si px statuatur pro 2do, & q pro ultimo termino, erit semper $x \propto -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

4 *Exemplum.*

Porrò quoniam æquationes omnes quatuor dimensionum reduci possunt ad æquationes trium dimensionum, & in omnibus quidem æquationibus secundus terminus tolli potest, ostendendum solummodo restat, quo pacto divisores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur, tantùm 1 & 3 dimensiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio $x^3 \propto * \, qx.r.$

In qua x designet quantitatem, cujus valor quæritur; q & r autem quantitates cum suis signis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Esto etiam $x \propto y + z$

Eritque $x^3 \propto y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 \propto qx + r.$

Ex hac autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$3zyy + 3zzy \propto qx$, & $y^3 + z^3 \propto r$

div. per $y + z$. fit $3zy \propto q$ vel $y^3 \propto r - z^3$

$$y \propto \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \propto \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \propto r - z^3$$

$$z^3 \propto \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3},$$

& $y^3 \propto \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$, quia $y^3 \propto r - z^3$

 vel

$$\text{vel } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \text{ quia } y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$\& \; x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$
quia $x \infty z + y$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipsius x reperitur signum 8, & in secunda signum contrarium 8, atque quantitates per ea conjunctæ omnino eædem existunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipsius x, duæ illæ partes simul addi debent; poterunt ipsa determinari, ponendo pro uno +, & pro altero —, ita ut habeatur

$$x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis x, licebit ipsius beneficio æquationem, si reducibilis sit, in duas rationales dividere: quoniam tunc $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ extrahi poterit, excepto tantùm, quandò quantitate q signo + adfectâ, $\frac{1}{4}rr$ minor est quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi difficultas aliqua superesse videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hisce extractione; sed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex binomio literali inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium assumere liceat, &c.

Quanquam autem sæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæsitum per aliquam ex aliis Regulis faciliùs inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præsertim in æquationibus numeralibus, ubi divisores ultimi Termini complures existunt aut difficiles sunt inventu, cum fructu usurpari.

Quibus præmissis, potero generalem Regulam commodiùs exprimere, quæ talis est:

Si in æquatione Proposita, quæ in duas alias rationales est divisibilis, quæratur valor quantitatis incognitæ

vel

vel alicujus alterius, quæ ut incognita conſideratur, poterimus ipſam aut dividere (ſicut in 1mo exemplo); aut fractionem inde ortam per communem aliquem diviſorem abbreviare (ſicut in 2do exemplo) aut denique radicem quadratam (ſicut in 3^{tio} exemplo) aut radicem cubicam extrahere, excepto tantùm, ut diximus, uno caſu, ubi q deſignat quantitatem ſigno $+$ adfectam, exiſtente $\frac{1}{4}rr$ minore quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Vbi tandem id advertendum, Regulam hanc in reſolvendis æquationibus trium & quatuor dimenſionum eandem eſſe cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex ſuperiori calculo manifeſtum ſit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri poſſit. Hanc verò eandem eſſe, vel hinc evidens fit, ſi ex illa ſola conficiamus haſce quatuor; quippe ponendo quantitates q & r ſigno $+$ adfectas eſſe, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty +qx+r$,

$$x \infty \sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}},+\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q deſignet quantitatem ſigno $+$, r autem quantitatem ſigno $-$ adfectam, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty +qx-r$, (mutando tantùm in Regula ſigna, quæ ipſi r impares dimenſiones habenti præfiguntur)

$$x \infty \sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}},+\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q deſignet quantitatem ſigno $-$, & r ſigno $+$ adfectam, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty -qx+r$, (mutando ſigna, quæ ipſi q impares dimenſiones habenti præfiguntur)

$$x \infty \sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}},+\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Denique ſi q & r ſigno $-$ ſint adfectæ, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty -qx-r$, (mutando ſigna, ut ſupra)

$$x \infty \sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}},+\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Et nota, quòd eodem modo operando ſimiles regulæ pro altioribus æquationibus inveniri poſſint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi incognita quantitas, vel quæ ut incognita conſideratur, trium vel

quatuor dimensionum est, aliquando paulò longior sit, præstat tum ejus loco vigesimâ Regulâ uti, per quam omnes casus trium vel quatuor dimensionum, nullo excepto, reduci possunt; Vel etiam regulâ 17, ubi non adstringeris æquationibus quatuor dimensionum, sed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam omnem Propositam rationalem æquationem, quæ per aliquam rationalem divisibilis est, si modo aliqua litera, quam libuerit, tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ considerentur.

3. Sæpe autem satis breviter Reductio æquationum, quæ tantummodo per irrationales reduci possunt, inveniri potest. exempli gratiâ, si habeas hanc æquationem,

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0$$
$$- cc$$

vel $\overline{x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4} \propto ccxx$

addas utrimque quantitatem aliquam per xx multiplicatam, (cum ab altera parte habeas cc in xx) talem nempe ut $\sqrt{}$ quadrata ex altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies esse $+aaxx$, ideoque utrimque hac $+aaxx$ addita, & radice quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \propto x\sqrt{aa+cc}$$

atque ideo Proposita æquatio ex multiplicatione duarum sequentium æquationum resultare poterit

$$xx - ax \quad + aa \propto 0.$$
$$- \sqrt{aa+cc}$$
$$xx - ax \quad + aa \propto 0.$$
$$+ \sqrt{aa+cc}$$

4. Magnum quoque usum habent aliæ quædam Regulæ, tam in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantummodo per irrationales reduci possunt. ex. gr. per 11 Regulam, omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantùm ex duabus aliis per multiplicationem produci possunt, in quarum alterutra, unus pluresve termini deficiunt, si æquatio consideretur secundùm incognitam quantitatem, sed etiam si tantùm quævis alia litera, sive cognita, sive incognita, reperitur, quæ ut incognita consideratur, & æquatio secundùm illam in ordinem redacta talis sit, ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus plu-

pluresve termini deficiunt. sic quamvis sequens æquatio 6 dimensionum

$$x^3 - 2axx + 3abx + 6a^3 \propto 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + 6abb$$

per $x^3 + 2axx + 4aax - 4a^3 \propto 0$
$$\qquad + 2ab \quad - 8b^3$$

Product. x^6, &c.

produci non possit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, si scilicet x ut incognita quantitas consideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, si vel a vel b ut incognita quantitas consideretur, ut ex æquationibus, ex quibus producta est, patet; ac proinde æquatio illa Proposita per XI Regulam reduci poterit.

Hîc ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in sequentibus gradu ad finem, quem jam dudum desidero, festinabo.

Diversas adhuc alias Regulas in paratu habeo, quas hîc simul adjungerem, si non aliquid in futurum reservare animus esset: Nimirum inter cæteras una est, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationalibus produci possunt, ad easdem reduco, non cognitis divisoribus ultimi termini; item alia, per quam sæpe literales æquationes reduco, quæque in eo consistit, quòd unam aut alteram literam ponam $\propto 0$, vel $\propto$ alii alicui quantitati, quam libuerit, & quòd hanc æquationem inde resultantem priùs reducere coner, & postea etiam Propositam per hanc. Exempli loco adjungam hanc

REGULAM,

Quâ omnes rationales æquationes, quæ nullas fractiones continent & reduci possunt, reducuntur, si ponendo unam aut plures literas $\propto 0$, aut $\propto$ alii quam libuerit quantitati, talis inde æquatio resultet, quæ una tantùm dimensione minor & irreducibilis sit.

Ex. gr. habeatur hæc æquatio $x^3 - 5axx + 6bbx - 18abb \propto 0$,
$$\qquad\qquad - 9bc - 9a^3$$
$$\qquad\qquad - 9aa + 27abc$$

in

in qua si a ponatur ∞ o, exsurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx \infty 0$$

seu $xx + 6bb - 9bc \infty 0$, quæ non potest reduci. Regula verò per quam reductionem Propositæ æquationis jam institituo, talis est:

Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, si non ex diversis partibus aut Membris constet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino signis + vel — cæteris connectuntur) *vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit,* (quemadmodum hîc per $+6bb$, vel $-9bc$) *omnia Membra ultimi termini Propositæ æquationis, quæcunque per illud dividi possunt, atque illud quotiens, sive unum sive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc summam Proposita æquatio dividi poterit.*

Vt in hoc exemplo, dividendo $-18abb$ per $+6bb$, exsurgit quotiens $-3a$, quod additum ipsi x, quia in Proposita æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per $+6bb$ sit divisibile, exsurgit $x - 3a$, quod Propositam æquationem dividere poterit. Vel si alterum exortæ æquationis Membrum assumptum fuisset, nimirum $-9bc$, similiter prodiisset $-3a$, quia solum $+27abc$ inter Membra ultimi termini in Proposita æquatione reperitur, quod per $-3a$ dividi potest.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono ∞ o, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, non tantùm rationales literalium æquationum radices, sed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri possint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices investigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo asscribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quæ alia est, quàm quæ in 21 Regula ostensa fuit.

Hactenus æquationes absolutè tantùm consideravi, nunc superest, ut eas etiam relativè, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, considerem.

Sed priusquàm hoc aggrediar pauca quædam de iis Regulis, quas hucusque tradidi, dicenda restant. Illæ verò sunt duorum generum, quædam enim aliquibus in casibus docent Propositam

æqua-

æquationem *vel non esse reducibilem, vel inquantum, vel per quales non sit reducibilis*, ut Regula 1, 2, 12, 13, & 14, & 15. quædam etiam docent, *quo pacto æquationes reduci debeant, quas scimus reducibiles esse, vel per aliquam in qua aliquis terminus datus, aut* ∞ 0 *est*, quales sunt 9 & 11, *vel per aliquam rationalem*, ut sunt 16 & 17, *vel denique per alias*. Sed quia sæpe latet, utrum Proposita æquatio, vel quæ ex Problemate quodam educta est, reducibilis sit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo observandus est. Et quem harum Regularum respectu optimum judico, talis est: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio sit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut saltem magna ex parte; adeò, ut multi labores tali in casu præscindantur. At si hoc non ita appareret, transirem ad Regulam XI, (imprimis si Vltimus æquationis terminus multos divisores, vel qui inventu difficiles sint, admittat, vel si æquatio surdas quasdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci possunt, quæ divisibiles sunt ope alterius in qua una aut plures quantitates desunt, sive æquationem in ordinem redigas respectu incognitæ, sive respectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita consideratur.

Et sic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci possunt. Si verò nec hoc pacto succedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Possunt etiam hîc quædam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur sitne aliqua æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quam quidem in præsentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.

Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio est deducta, multa adhuc dici possent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) *Inventione*, quâ omnes aut saltem multæ Reductiones rescindi queunt; quàm *de aliis Reductionibus, quæ sæpe illis supra descriptis breviores existunt*. Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematis multos esse, eosque diversos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimensionum æquatio-

nem, si hunc, quàm si alium modum sequaris, perveniendi. Imò non tantum diversâ, sed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurium aut pauciorum dimensionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantùm multum laboris inveniendo postremam æquationem præteribis, sed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, si ad altiores æquationes delabaris, quærendæ essent, rescindes.

Quod alterum spectat, ejus à me specimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinatarum circulo inscriptarum inveniuntur, in eo nempe consistens, quòd cum ultimam æquationem, quæ omnes Problematis conditiones includit, habeas, præterea adhuc aliam, sed aliâ methodo, investiges, quæ itidem omnes conditiones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipsas à se invicem tam diu, quàm fieri possit, subtrahas, vel quod eodem redit, earum communem divisorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus satis fusè ostendi.

Vide Sectionem XXI tuarum Exercitationum Mathematicarum.

Et hujus Methodi utilitas se longè lateque diffundit, præsertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimensiones excurrunt. Nam sæpe numero, si earum reductionem per præcedentes Regulas investigares, ætatem consumeres, quod alioquin, si hanc viam sequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento absolvere posses.

Cum igitur utrumque & Reductiones in principio in totum vel ex parte rescindendi, & eas in multis casibus adhuc compendiosiùs quàm per præscriptas Regulas inveniendi, majoris momenti sit, quàm ut hîc dignè pertractari possit; atque ego etiam scribendo, tu verò legendo, defessi simus: præstat, ut hîc subsistamus atque aliquantulùm respiremus, reliquâque opportuniori tempori reservemus.

Interim vale & me ama.

Datum Amstelædami Pridie Iduum Iulii A° 1657.

IO-

IOHANNIS HVDDENII EPISTOLA SECVNDA, *DE* MAXIMIS ET MINIMIS.

Clarissime Vir,

*Vod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hic describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc*

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \infty 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \infty 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0$$

in qua etiam duæ radices æquales comprehenduntur, videlicet $x \infty y$, ac denuo $x \infty y$. Vel si illam multiplicassemus per $xx + 2yx + yy \infty 0$, obtinuissemus duas falsas radices æquales: utcunque autem hæc multiplicatio fiat, si pro y ponatur ejus valor, habebitur

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, seu, quod eodem redit, $+1, -2, +1$ (quoniam dividi potest per xx, & multiplicatores x^3, pxx, qx, & r nullam mutationem efficiunt) multiplicetur per Arithmeticam Progessionem: erit productum hujus multiplicationis $\infty 0$.

Nam

Mult.	$+1,$	$-2,$	$+1$
per	$a,$	$a+b,$	$a+2b$
fit	$a,$	$-2a-2b,$	$+a+2b$
seu	$+2a-2a,$	$+2b-2b \infty 0.$	

Mult.	$+1,$	$-2,$	$+1$
per	$a,$	$a-b,$	$a-2b$
fit	$a,$	$-2a+2b,$	$a-2b$
seu	$2a-2a,$	$+2b-2b \infty 0.$	

Huc usque universaliter consideravi omnes æquationes, duas æquales radices habentes, quomodocunque ipsæ proponantur, hoc est, sive in iis termini quidam desint sive non, ut & quomodocunque signa $+$ & $-$ sese habuerint. Quod manifestum erit consideranti nobis solummodo rem esse cum hisce numeris $+1$, -2, $+1$, non autem cum multiplicatoribus x^3, pxx, qx, & r.

Similiter respectu Arithmeticæ Progressionis res etiam generalis manet, quandoquidem duo priores termini a, $a+b$, & a, $a-b$ indeterminati sunt. Quod restat, ex sola inspectione præcedentis exempli, conferendo duas sequentes multiplicationes, perspicuum fiet.

$$\begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ \underline{xx - 2xx + xx \quad \infty 0} \\ \left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0. \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ \underline{xx - 2yx + yy \quad \infty 0} \\ \left.\begin{array}{l} x^5 - 2yx^4 + yyx^3 \\ \quad + px^4 - 2pyx^3 + pyyxx \\ \qquad + qx^3 - 2qyxx + qyyx \\ \qquad\quad + rxx - 2ryx + ryy \end{array}\right\} \infty 0. \end{array}$$

Mult. per $a.a \; 8 \; b.a \; 8 \; 2b.a \; 8 \; 3.b.a \; 8 \; 4b.a \; 8 \; 5b.$

Nam

Nam quoniam hæc producta $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$, & $xx - 2xx + xx$ in x^3 eadem existunt, erit etiam $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multiplicatum per $a, a \pm b, a \pm 2b$ æquale o; sic &, quoniam $+px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ idem est quod $xx - 2xx + xx$ in pxx, erit quoque $px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ multiplicatum per $a \pm b, a \pm 2b, a \pm 3b$ (siquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progressionis ad libitum sumi potest) æquale o; atque sic deinceps. Vnde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc seriem proportionalium sit $\propto$ o, nec non ut unus valor ipsius $x \propto y$, quæ una duarum radicum æqualium est, necessariò includatur. Et cum hîc rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propositum Theorema universaliter demonstratum de quibuscunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, & ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmeticam Progressionem multiplicari poterit. Quòd si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, & sic porrò, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantùm istarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonstrato, transeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ sic se habet.

Positis quotcunque quantitatibus Algebraïcis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ $\propto z$; & ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: & Pro-

ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeò facile est, ut huic rei ulteriùs insistere nihil aliud sit, quàm operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est. Particulares verò, quas antehac in aliquibus exemplis vidisti, hinc resultant, quemadmodum ex subjunctis operationibus, utroque modo factis, perspicere licebit.

1. *Cùm Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur*, multiplico tantùm unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & suppono Productum ∞ o.

Ex.gr. sit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ ∞ alicui maximo.

mult. per $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x$ ∞ o, vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c}$ ∞ o.

Iuxta generalem Methodum erit

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \text{ ∞ o.}$$
$$- z.$$

mult. per Arithm. Progr. $\quad 3. \quad 3.2. \quad 1. \quad 0.$

& fit, ut ante, $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x$ ∞ o, seu

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \text{ ∞ o.}$$

2. *Si Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, unam tantùm incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur*, operatio institui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitas. Deinde si reliquæ quan-

quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatus dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul ∞ o, ut ex sequentibus exemplis clariùs patebit.

1 *Exemplum.*

Esto $\frac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3}-ax+bx+ab \infty$ alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ ab, reliquisque terminis sub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$$\frac{4aab^3+5a^3x+x^5-ax^4+bx^4.}{x^3}$$

Mult. num. per $-3,\ -2,\ +2,\ +1,\ +1$:

fit $-12aab^3-10a^3x+2x^5-ax^4+bx^4$ mult. per $x^3 \infty$ o.

&, dividendo per x^3,

$$-12aab^3-10a^3x+2x^5-ax^4+bx^4 \infty o.$$

Iuxta generalem Methodum

est $\frac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3}-ax+bx+ab \infty$ o,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -z$

id est, $4aab^3+5a^3x+x^5-ax^4+bx^4+abx^3 \infty$ o;
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -z$

Seu, ordinatâ æquatione, $x^5-ax^4+abx^3 * +5a^3x+4aab^3 \infty$ o.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +b \quad -z$

$+2,\ +1,\quad 0,\ -1,\ -2,\ -3$

$2x^5-ax^4 \quad * \quad * -10a^3x-12aab^3 \infty$ o.
$\quad +b$

2 *Exemplum.*

Esto $\frac{baax+aaxx-bx_3,-x_4}{baa+x^3}-a+x \infty$ alicui maximo,

De-

Deletâ quantitate cognitâ a, & reliquis sub communi divisore reductis, habebitur $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Porrò pro } \frac{\overset{+1,}{2baax} \overset{+2,}{+aaxx} \overset{+3}{-bx^3}}{baa}, \text{ scribo } 2baax + 2aaxx - 3bx^3 \text{ in } baa \\ \text{pro } \frac{\overset{-2,}{2baax} \overset{-1,}{+aaxx} \overset{0}{-bx^3}}{x^3}, \text{ scribo } -4baax - aaxx \quad \text{ in } x^3 \end{array}\right\} \propto 0$$

Divisis per aax, habebitur
$$\left.\begin{array}{l} \overline{2baa + 2aax - 3bxx} \text{ in } b \\ -4bx - xx \qquad \text{ in } xx \end{array}\right\} \propto 0$$

adeoque $\overline{-x^4 - 4bx^3 - 3bbxx + 2aabx + 2bbaa} \propto 0$.

Sic & si fuerit $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3aax - c^3} \propto$ alicui maximo,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pro } \frac{\overset{-2,}{2baax} \overset{-1,}{+aaxx} \overset{0,}{-bx^3} \overset{-3}{+a^4}}{4x^3}, \text{ scribo} & -4baax - aaxx - 3a^4 \text{ in } 4x^3 \\ \text{pro } \frac{\overset{-1,}{2baax} \overset{0,}{+aaxx} \overset{+1,}{-bx^3} \overset{-2}{+a^4}}{2bxx}, & -2baax - bx^3 - 2a^4 \text{ in } 2bxx \\ \text{pro } \frac{\overset{0,}{2baax} \overset{+1,}{+aaxx} \overset{+2,}{-bx^3} \overset{-1}{+a^4}}{-3aax}, & +aaxx - 2bx^3 - a^4 \text{ in } -3aax \\ \text{pro } \frac{\overset{1,}{2baax} \overset{2,}{+aaxx} \overset{3,}{-bx^3} \overset{0}{+a^4}}{-c^3} & +2baax + 2aaxx - 3bx^3 \text{ in } -c^3 \end{array}\right\} \propto 0.$$

Iuxta generalem Methodum

est $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto z$

vel $\overline{2baax + aaxx - bx^3 \propto baaz + x^3z}$

seu $\overline{-bx^3 + aaxx + 2baax - baaz} \propto 0$
$ -z$

$$\begin{array}{lllll} \text{Arith.Prog.} & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$\overline{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax} \propto 0$, hoc est,
$-3z$

$\frac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} \propto z$

ac proinde $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$

&, ut supra, $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \propto 0$.

Patet

Patet itaque, duas has speciales Regulas in generali illa Methodo esse fundatas respectu hujus Progressionis o, 1, 2, 3, 4, &c. multiplicando scilicet terminum, in quo incognita quantitas x non reperitur per o; ubi x unam habet dimensionem per 1; & sic porrò. Sed in genere notandum, quòd, dum operando juxta generalem Methodum Progressionem illam Arithmeticam ad libitum sumere licet, semper is terminus æquationis, quem libuerit, tolli possit, multiplicando illum tantùm per o. Atque ita valor ipsius z per unam Progressionem simpliciùs obtineri poterit, quàm per aliam: ut, si in præcedenti exemplo, ubi multiplicavimus per 3, 2, 1, 0, multiplicassemus per 0, 1, 2, 3, obtinuissemus $aaxx + 4baax - 3baaz \infty 0$, seu $\frac{xx + 4bx}{3b} \infty z$.

Vnde apparet, ipsam quantitatem z (sive maximum vel minimum), si x cognita supponatur, inveniri atque exprimi posse multis diversis modis, è quibus faciliores pro Constructione eligere licebit: Aut si z cognita supponatur, poterit x totidem diversis modis inveniri. Porrò considerando z & x, ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam æquationem instituere inter duos ex simplicissimis valores: ut, in superiori exemplo, inter $z \infty \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $z \infty \frac{xx + 4bx}{3b}$.

3. *Si termini Algebraïci, Maximum aut Minimum designantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt*, suppono ipsos ∞z; & per hanc æquationem & per cæteras datas, seu quæ ex natura Problematis manant, (quæque semper simul, si omnes Problematis conditiones includunt, tot numero existunt, quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum si unum tantùm Maximum aut Minimum inter infinitas magnitudines quæritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æquationes omnes ad unam, in qua necessariò duæ quantitates incognitæ continebuntur, & inter eas z. Cumque tunc sola z ad Maximi vel Minimi inventionem nota esse debeat, manifestum est in eum finem duntaxat concipiendum esse, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercitationum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantùm

 quòd

quòd Maximùm hîc appellem z, & quod ibi z nominatum est, hîc appellem v.

$$1^{ma}\ \text{Æq.}\ y^3 - nyx + x^3 \infty 0$$
$$2^{da}\ \text{Æq.}\ v - x \infty y$$
$$3^{tia}\ \text{Æq.}\ \tfrac{1}{2}v - y \infty z\ \text{maximo.}$$

Substituto valore ipsius y $2^{dæ}$ æquationis in locum ipsius y $1^{mæ}$ & $3^{tiæ}$, habebitur

$$\text{pro } 1^{ma}\ \text{Æq.}\ v^3 - 3vvx + 3vxx \infty vnx - nxx$$
$$\text{\& pro } 3^{tia}\ \text{Æq.}\ x \infty z + \tfrac{1}{2}v.$$

Subrogato autem valore ipsius x $3^{tiæ}$ æquationis in ejusdem locum in 1ma, fiet pro

$$1^{ma}\ \text{Æq.}\ \tfrac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \tfrac{1}{4}nvv - nzz$$
$$\text{vel } \tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0.$$

Atque hæc quidem æquatio jam sola relicta est, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis satisfiat, hoc est, ut ea ita determinetur, ut z fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) candem æquationem

$$\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$$
per Arith. Prog. $3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$
$$\text{obtineoque } \tfrac{3}{4}v^3 - \tfrac{1}{2}nvv + 3zzv \quad * \quad \infty 0$$
$$\text{vel} \quad 3zz \infty \tfrac{1}{2}nv - \tfrac{3}{4}vv.$$

Hinc subrogato valore ipsius zz, per hanc æquationem invento, in ejus locum in præcedenti $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, obtinebitur $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + \tfrac{1}{2}nvv - \tfrac{3}{4}v^3 + \tfrac{1}{6}nnv - \tfrac{1}{4}nvv \infty 0$

$$\text{hoc est,} \quad -\tfrac{1}{2}v^3 + \tfrac{1}{6}nnv \infty 0$$
$$\text{vel } vv \infty \tfrac{1}{3}nn.$$

Si Arithmetica Progressio fuisset 0, 1, 2, 3, invenissemus $3zz \infty \dfrac{nvv}{8v+4n}$; si 2, 1, 0, —1, habuissemus $3zz \infty \dfrac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$.

Et sive valor ipsius zz, per utramlibet harum æquationum inventus, in præcedenti subrogetur æquatione $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, sive alter alteri adæquetur, ponendo $\tfrac{1}{2}nv - \tfrac{3}{4}vv \infty \dfrac{nvv}{8v+4n}$, vel $\infty \dfrac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$, obtinebitur semper $vv \infty \tfrac{1}{3}nn$.

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hîc parùm inter

inter se differant, potest tamen sæpe numero, ut supra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior sit quàm alia, quo quidem casu commodiorem viam, quæ facilè perspicitur, eligere satius erit.

Cæterùm notandum, ultimam hanc æquationem $\frac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \frac{1}{4}nvv - nzz$ determinari etiam posse per secundum modum præcedentem. Etenim existente $zz \infty \frac{\frac{1}{4}nvv - \frac{1}{4}v^3}{3v + n}$, & $z \infty$ maximo: erit etiam hic valor ipsius zz omnium maximus, ideoque

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}nvv - \frac{2}{4}v^3 \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4}nvv - \frac{3}{4}v^3 \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0$$

div. per vv.

$$\text{vel} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}n - \frac{2}{4}v \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4}n - \frac{3}{4}v \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0, \text{ id est, } \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}nv - \frac{6}{4}vv \\ \frac{2}{4}nn - \frac{3}{4}nv \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{vel } \frac{2}{4}nn - \frac{6}{4}vv \infty\, 0$$

$$\text{seu } \frac{1}{3}nn \infty vv.$$

Quoniam verò in multis casibus æquatio ultimò relicta non sinit ut valor ipsius z vel zz, aut z^3, &c. in ejusmodi terminis, in quibus ipse z non invenitur, exprimi possit, visum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hîc, Vir Amicissime, multa adhuc dicenda restarent, sed ne rursus epistola mea voluminis instar se extendat, scriptionis meæ filum abrumpam; præsertim cum id, quod hîc desideratur, non difficile sit ex præcedentibus colligere. At verò ne te lateat, quid hîc desiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus adornavi, quemque nuper obiter & quasi per transennam inspexisti. In eo autem pertractantur

1. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraici, Maximum vel Minimum designantes, considerantur

1. *Vel respectu cognitionis nostræ, sic ut certi simus in iis Maximum esse comprehensum, si aliquod detur Maximum; aut Minimum, si aliquod Minimum detur.*

Termini autem hi Algebraïci in se continent

Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem

1. *Vel fractionem nullam, in cujus Denominatore incognita reperitur quantitas.*
2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipsa reperitur.*

Vel plures unâ incognitâ quantitate, quæ duplices sunt

1. *Vel tot simul cum iis æquationes dantur, seu in natura Problematis includuntur, quot sunt incognitæ quantitates una exceptâ;*
2. *Vel non totidem, aut etiam nullæ.*

2. *Vel respectu nostræ inscientiæ*, id est, cùm incerti sumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur, ipsos autem rursus considero vel *absolutè*, vel *relativè* ad aliquod Problema.

2. *Ejusdem usus atque utilitas*, quæ quidem se longè lateque extendit, ac præsertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari possunt. Cujus exemplum illustre est *Determinatio omnium æquationum*, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantùm corollarium existit.

Vale, Vir Amicissime, & me amare perge.

Dabam Amstelædami
6 Cal. Februar.
Aº 1658.

Tui

Observantissimum

IOHANNEM HVDDE.

FINIS.

HENRICI van HEVRAET EPISTOLA DE TRANSMVTATIONE CVRVARVM LINEARVM IN RECTAS.

Clarissimo Viro

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
HENRICVS van HEVRAET
S. D.

C*Vm nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videndi Methodum à me inventam, cujus beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit* D. Huddenius) *in rectas possunt transmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocyùs transmitterem, tuoque inprimis judicio exponerem. Verùm præmonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam esse, cùm iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui, adeò ut vix quicquam prælo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quæ ante circa hanc rem meditatus sum, eaque paucis hîc subjicere. Quæ, si Mathematicis non displicitura judices, Commentariis tuis adjungere poteris.*

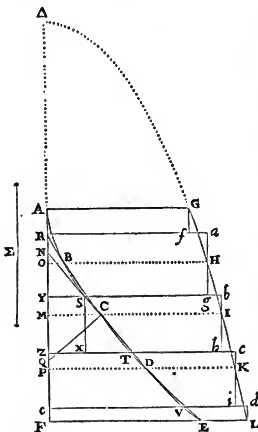
Dat. Salmurii, die 13 Ianuarii. A°. 1659.

Vale, & perge amare
ex asse tuum
HENRICVM van HEVRAET.

Huddenius *noster te salutat diligenter.*

Si

Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratia, A B C D E, G H I K L, & recta A F, ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto M, in linea A F pro libitu assumpto, perpendiculari M I, secante datas curvas in C & I, uti & C Q perpendiculari ad curvam A B C D E,) M C sit ad C Q, sicut linea aliqua data Σ ad M I: erit superficies A G H I K L F æqualis rectangulo comprehenso sub data linea Σ & alia recta æquali curvæ A B C D E.



Dividatur linea A F in partes quotcunque, verbi gratiâ, in punctis O, M, & P, ducanturque perpendiculares O H, M I, P K, secantes curvam A B C D E in punctis B, C, & D, at curvam G H I K L in punctis H, I, & K; & per puncta A, B, C, D, & E agantur tangentes, quæ sibi mutuò occurrant in R, S, T, & V; & per hæc puncta ducantur lineæ R *a*, Y *b*, Z *c*, *e d* perpendiculares ipsi A F; & per puncta G, H, I, K, & L agantur lineæ ipsi A F parallelæ, secantes R *a* in *f* & *a*, Y *b* in *g* & *b*, Z *c* in

in *b* & *c*, *ed* in *i* & *d*; denique ex S ducatur S X parallela lineæ A F, producaturque tangens T S usque in N.

Propter rectum angulum N C Q, erit C M ad C Q, ut M N ad N C. Atqui M N est ad N C, ut S X ad S T. Quare erit S X ad S T, ut C M ad C Q. Et quia C M est ad C Q, ut Σ ad M I, erit & S X ad S T, ut Σ ad M I, ac proinde rectangulum sub S X sive Y Z & M I sive Y *b* æquale rectangulo sub S T & Σ. Eodem modo demonstrabitur, rectangulum *c e* esse æquale $\square^{lo}$ sub T V & Σ, & □ *d* F ∞ □ V E, Σ, & □ *a* Y ∞ $\square^{lo}$ sub R S & Σ. Quapropter omnia hæc rectangula simul sumpta æqualia erunt rectangulo sub Σ & alia recta æqualia omnibus tangentibus simul sumptis. Vnde cum illud verum sit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis constans, si eorum numerus in infinitum augeatur, desinat in superficiem A G H I K L F, ac tangentes similiter in lineam curvam A B C D E, liquet superficiem A G H I K L F æqualem esse rectangulo sub Σ & recta æquali curvæ A B C D E. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ investigari possit, sequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva A B C D E ejus naturæ, ut, sumpto in linea A F pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari M C, si A M vocetur x, & M C vocetur y, semper yy sit ∞ $\frac{x^3}{a}$. Deinde positis A Q ∞ s, C Q ∞ v, & M I ∞ z: erit Q M ∞ $s - x$, & ejus quadratum ∞ $ss - 2sx + xx$. Cui si addatur quadratum ex M C, hoc est, yy sive $\frac{x^3}{a}$, invenietur $ss - 2sx + xx + \frac{x^3}{a}$ ∞ vv.

Propter duas æquales radices mult. juxta meth. Huddenii per 0 1 2 3 0,

& invenietur $-2sx + 2xx + \frac{3x^3}{a}$ ∞ 0.

Vnde A Q sive s ∞ $x + \frac{3xx}{2a}$. à qua si subtrahatur A M ∞ x, remanebit M Q ∞ $\frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum est $\frac{9x^4}{4aa}$. cui adde □ C M seu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet □ C Q ∞ $\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}$. Erit jam ut C M $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ad C Q $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licet

enim

enim eam pro libitu assumere) ad $MI \infty z$, eritque $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax+\frac{1}{9}aa}$. Id quod arguit, lineam GHIKL esse Parabolam, cujus vertex est in Δ, existente $A\Delta \infty \frac{4}{9}a$, & latere recto $\infty \frac{1}{4}a$. ac proinde longitudo lineæ curvæ ABCDE est $\sqrt{\frac{v^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, existente $\Delta F \infty v$.

Similiter si loco $yy \infty \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, aut $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, atque sic porrò in infinitum: invenietur semper superficies AGHIKLF ejus naturæ ut quadrari possit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò ABCDE sit Parabola, cujus axis AG, & latus rectum ∞a: invenietur $MQ \infty \frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum $\infty \frac{4x^6}{a^4}$. cui adde quadratum CM, & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro □ CQ. Hinc ut CM $\frac{xx}{a}$ ad CQ $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4}+\frac{x^4}{aa}}$, sic cognita aliqua linea, puta a, ad $MI \infty z$: eritque $z \infty \sqrt{4xx+aa}$, & linea GHIKL Hyperbola, cujus axis linea AG, centrum punctum A, latus rectum $\infty \frac{1}{2}a$, & transversum $\infty 2a$.

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non posse, quin simul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vice versâ.

FINIS.